МИНОБРНАУКИ РОССИИ

ФГБОУ ВПО «Уральский государственный лесотехнический университет»

Кафедра древесиноведения и специальной обработки древесины

Е. И. Стенина

МЕТОДЫ И СРЕДСТВА НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Многофакторный эксперимент

Методические указания по выполнению практических, лабораторных и исследовательских работ студентами очной и заочной форм обучения по направлению 250400.62 «Технология лесозаготовительных и деревообрабатывающих производств»

Екатеринбург 2013

Печатается по рекомендации методической комиссии факультета МТД
Протокол № ___ от __________ 200_.

Рецензент – доцент кафедры ДиСОД Е.Е. Швамм

Редактор

Подписано в печать		Поз.
Плоская печать	Формат 60x84 1/16	Тираж 50 экз.
Заказ №	Печ. л.	Цена

Редакционно – издательский отдел УГЛТУ
Отдел оперативной полиграфии УГЛТУ

ВВЕДЕНИЕ

Начало XX века совпало с возникновением явления, которое сейчас называется научно-технической революцией (НТР).

Принято воспринимать НТР как совокупность хронологии и относительной важности различных достижений: полеты в космос, достижения в области атомной энергетики, автоматизация производства и управления, прорыв в области средств коммуникаций. Однако великие открытия были всегда, в любую эпоху развития науки. И каждый раз не менее значимые для своего времени. Типичным именно для эпохи НТР является превращение науки непосредственно в производительную силу общества.

На современном этапе развития каждое государство в структуру своей стратегической доктрины развития общества включает различные аспекты научно-технического прогресса (НТП).

В настоящее время не только процессы открытий и доведения их результатов до приемлемой практически реализуемой формы, но и процесс передачи и освоения результатов НТП требует участия науки. И многие другие проблемы жизни общества, которые ранее решались на базе интуиции или здравого смысла, на опыте поколений, сейчас требуют активного и целенаправленного вмешательства, участия науки. Ни один серьезный вопрос в современных условиях нельзя эффективно решить, не опираясь на науку [1].

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Методические указания предназначены для приобретения студентами практических навыков в планировании и проведении многофакторных экспериментов с использованием математической теории планирования эксперимента, а также статистической обработки и анализа полученных данных.

2. ПОНЯТИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА

В соответствии с тенденциями развития современной науки в методологии принят системный и вероятностно-статистический подход к исследованию процессов. Обобщенный процесс рассматривается как динамическая система, а совокупность возмущающих воздействий - как многомерные случайные процессы. Важной задачей исследований является формализация их результатов с целью сокращения сроков исследования и создания математического описания изучаемого процесса путем построения математической модели объекта.

Математическая модель – это совокупность математических зависимостей, описывающих функционирование системы [2].

Математическая модель строится по результатам теоретических и экспериментальных исследований. Процессы, связанные с обработкой древесины, крайне сложны, чтобы можно было получить их теоретическое описание, поэтому основным средством получения информации является специально спланированный эксперимент.

Эксперимент - это совокупность опытов, позволяющая установить влияние воздействующих факторов x_i на выходные параметры объекта исследования y_i (рис.1).

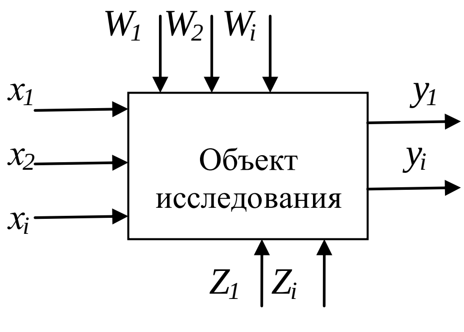

Рис. 1. Схема эксперимента.

Фактор - это измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение (температура, давление, количество циклов и т.п.).

Постоянными называются факторы, не меняющие своего значения в пределах всего эксперимента (W_i, Z_i).

Переменным (варьируемым) называется фактор x_i, значение которого меняется от опыта к опыту. Каждое значение, принимаемое фактором в опыте, называется уровнем переменного фактора. Диапазон изменения (варьирования) переменных факторов ограничен верхним и нижним уровнями.

Выходным параметром называется результат эксперимента y_i, который является случайной величиной, т.к. всегда в большей или меньшей степени содержит ошибки, обусловленные погрешностью приборов, измерений, расчетов и т.п.

Опыт - часть эксперимента, выполненная при определенных значениях одного или нескольких факторов. С целью снижения вероятности ошибки при анализе результатов эксперимента необходимо дублирование каждого опыта.

Любое экспериментальное исследование условно можно разделить на три этапа: подготовка эксперимента, планирование и постановка опытов, обработка результатов измерений и их анализ.

Многофакторный эксперимент состоит в том, что при переходе от опыта к опыту изменяют уровни не одного, а всех или почти всех факторов одновременно по определенному плану.

Достоинством многофакторных экспериментов является их более высокая эффективность. При одинаковом количестве поставленных опытов они обеспечивают более достоверное математическое описание объекта или лучшее приближение к точке оптимума.

Под математической моделью исследуемого объекта понимается функция выходной величины вида

$$\eta = f(x_1, x_2, \ldots x_i) \qquad (1)$$

Выбрать математическую модель – это значит выбрать вид этой функции, записать ее уравнение и отыскать численные значения его коэффициентов на основании экспериментальных данных.

Зависимость выходной величины (отклика) y от варьируемых факторов x_1, x_2, … x_i, полученная с помощью регрессионного анализа, называется регрессионной.

Учитывая, что вокруг любой точки x_i на любом графике зависимости $y = f(x_i)$ всегда существует такая область, которая описывается линейным уравнением, поэтому на первой стадии экспериментов при недостатке данных целесообразно остановить свой выбор на линейной модели (1-го порядка).

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \ldots + b_ix_i \qquad (2)$$

Для получения линейного уравнения регрессии применяются ортогональные планы проведения эксперимента (полный факторный, дробный факторный).

Полный факторный план (ПФП) – это один из методов планирования многофакторных экспериментов, когда каждый из переменных факторов изменяется на только двух уровнях (верхнем и нижнем). Таким образом, диапазон варьирования каждого входного фактора будет следующим

$$x_{i\,min} \le x_i \le x_{i\,max} \qquad (3),$$

где $x_{i\ min}$ – нижний уровень варьирования i-го переменного фактора, который в нормированном виде обозначается как (-), или (-1);

$x_{i\ max}$ – верхний уровень варьирования i-го переменного фактора, который в нормированном виде обозначается как (+), или (+1).

В процессе проведения эксперимента согласно ПФП реализуются все возможные сочетания уровней варьирования переменных факторов. Следовательно, число опытов, необходимых для ПФП, составит

$$N = 2^k \quad (4),$$

где k – число переменных факторов.

Чередование уровней варьирования переменных факторов в ПФП для x_1 производится 1 через 1, для x_2 - 2 через 2 и так далее по степеням двойки.

Если в результате проверки адекватности линейного уравнения регрессии экспериментальным данным получен отрицательный результат, следует применять модели 2-го порядка [2].

3. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ РАБОТЫ

3.1. Установить факторы, влияющие на исследуемый объект.
3.2. Выявить и обосновать постоянные и переменные факторы исследуемого процесса.
3.3. Обосновать уровни варьирования переменных факторов.
3.4. Выбрать выходной(ые) параметр(ы) процесса.
3.5. Построить методическую сетку проведения эксперимента (табл. 1).
3.6. Выбрать план эксперимента и провести кодирование факторов (табл. 2, 3).
3.7. Провести эксперимент и свести первичные результаты опытов в табл. 4.
3.8. Статистически обработать полученные экспериментальные данные.
3.9. Вывести уравнение регрессии и проверить его адекватность
3.10. Проанализировать результаты эксперимента:
- выявить степень влияния выбранных переменных факторов на выходную(ые) величину(ы);
- получить уравнение регрессии в натуральном обозначении факторов (виде);

- построить графики зависимостей выходного(ых) фактора(ов) от переменных величин.

Таблица 1

Пример методической сетки эксперимента

Факторы	Значения
Постоянные факторы	
Количество образцов, шт	24
Порода древесины	сосна
Влажность древесины, %	8…12
Температура окружающей среды, ^{o}C	20±2
Способ пропитки	ВАД
Величина вакуума, МПа	0,08
Время создания вакуума, сек	10
Переменные факторы	
Длительность выдержки под вакуумом, мин	5, 15
Количество циклов вакуумирования, шт.	1, 3

Таблица 2

Матрица полного факторного эксперимента для 2-х переменных

№ опыта	X_1	X_2
1	+ / 15*	+ / 3
2	– / 5	+ / 3
3	+ / 15	– / 1
4	– / 5	– / 1

*****_в числителе даны нормированное, а в знаменателе - натуральное значение переменного фактора_

Таблица 3

Кодирование переменных факторов

Уровни факторов	Код фактора	Формализованный вид	Натуральные значения	
			Длительность вакуумирования, X_1	Количество циклов, X_2
Верхний	+	$X_{вi}$	15	3
Нижний	–	$X_{нi}$	5	1
Основной	0*	$X_i^0 = \frac{X_{вi} + X_{нi}}{2}$	10	2
Интервал	Δ**	$\Delta = X_{вi} - X_i^0$	5	1

Примечание: *натуральное значение основного уровня определяется как среднее арифметическое между значениями верхнего и нижнего уровней переменного фактора.

**интервал варьирования переменного фактора находится как разница между верхним и основным уровнями.

Таблица 4

Пример оформления первичных результатов эксперимента

Размеры образцов, см			Масса образцов, г		Поглощение, кг/м^3
a	*b*	*c*	до пропитки, m_1	после пропитки, m_2	
1-ый опыт					
2,02	2,03	2,08	4,18	4,82	75,04
2,02	2,04	2,07	4,76	5,09	38,69
2,05	2,05	2,08	4,54	4,91	42,33
2,04	2,04	2,09	4,67	5,23	64,38
2,05	2,06	2,08	4,62	4,94	36,43
2,05	2,07	2,09	4,97	5,37	45,10
2-ой опыт					
2,07	2,07	2,07	4,47	4,74	30,44
2,05	2,04	2,07	4,20	4,43	26,57
2,05	2,08	2,09	5,02	5,23	23,56
2,06	2,05	2,06	4,57	4,86	33,34
2,07	2,05	2,09	4,45	4,76	34,95
1,89	2,1	2,11	4,72	5,92	143,29
3-ий опыт					
2,04	2,05	2,08	4,63	4,93	34,49
2,05	2,04	2,07	4,63	4,92	33,50
2,01	2,06	2,08	4,82	5,23	47,61
1,97	1,98	2,09	4,00	4,48	58,88
2,05	2,06	2,09	4,62	4,92	33,99
2,07	2,06	2,1	4,92	5,31	43,55
4-ый опыт					
2,11	2,07	2,1	4,29	4,48	20,71
2,06	2,07	2,09	4,28	4,46	20,20
2,06	2,05	2,08	4,67	4,98	35,29
2,06	2,03	2,05	4,77	5,07	34,99
1,87	2,11	2,12	4,40	5,32	109,98
2,03	2,05	2,06	4,15	4,34	22,16

4. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В основе обработки результатов экспериментов с количественными факторами лежит регрессионный анализ, который включает в себя метод отыскания параметров математической модели и статистическую обработку экспериментальных данных.

Математическая статистика - это наука о математических методах обработки, систематизации и использовании результатов наблюдений для научных и практических выводов.

Множество значений результатов экспериментов (случайных величин), полученных в продублированных опытах, представляет собой статистическую совокупность.

Статистическая совокупность, содержащая в себе всевозможные значения случайной величины, называется генеральной статистической совокупностью.

Выборочной статистической совокупностью (или выборкой) называется совокупность, в которой содержится только некоторая часть элементов генеральной совокупности. По результатам экспериментов практически всегда сталкиваются с выборочной, а не с генеральной совокупностью.

Число значений выходной величины, содержащихся в выборке, называют объёмом выборки.

При обработке результатов эксперимента (выборки) необходимо:

– исключить грубые ошибки из ряда полученных данных (п. 4.1);
– вычислить необходимые статистические характеристики выборок (п. 4.2);
– проверить нормальность распределения случайных величин в выборках (п. 4.3);
– проверить значимость разницы между статистическими характеристиками различных опытов (п. 4.4);
– выбрать математическую модель и рассчитать коэффициенты регрессии (п. 4.5);
– проверить значимость коэффициентов регрессии (п. 4.6);
– проверить адекватность полученного уравнения регрессии (п. 4.7);
– проанализировать результаты экспериментов.

Расчеты должны оформляться в соответствии с требованиями ЕСКД.

4.1 Отбрасывание грубых наблюдений

Грубые наблюдения (промахи) возникают в результате грубых методических ошибок при постановке и проведении опыта, поэтому их необходимо из выборки исключить. Промах по абсолютной величине существенно отличается от остальных результатов опыта, т.е. принимает максимальное или минимальное значение в числовом ряду выборки.

Для проверки предположения, является ли сомнительный результат y_i промахом или нет, его временно исключают из выборки, и по оставшимся значениям выходной величины (наблюдениям) определяют среднее арифметическое $\bar{y}$ и оценку выборочной дисперсии S^2.

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} \tag{5}$$

где y_i – оставшиеся наблюдения выборки;

n – объем изменившейся выборки.

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - n\overline{y}^2}{n-1} \tag{6}$$

Затем рассчитывают критерий Стьюдента $t_{расч}$.

$$t_{расч} = \frac{|y_i - \bar{y}|}{S} \tag{7}$$

где y_i – проверяемый результат;

S – выборочное стандартное отклонение.

$$S = \sqrt{S^2} \tag{8}$$

где S^2 – выборочная дисперсия.

Из таблицы 1 распределения Стьюдента (см. приложение) по уровню значимости q (в деревообработке принимается равным $0,05$) и числу степеней свободы $f=n-1$ находят $t_{табл}$. Если $t_{расч} > t_{табл}$, то сомнительный результат является промахом и должен быть исключен из выборки. После этого исследуют следующий за ним сомнительный результат и т.д.

Пример:

По результатам дублированных опытов первого опыта (табл.4) были получены следующие величины поглощения защитного средства сосновыми образцами, *кг/м³*: 75,04; 38,69; 42,33; 64,38; 36,43; 45,10.

В полученной выборке подозрение вызывает y_i = 75,04 *кг/м³*. Этот результат временно исключаем из выборки и для оставшихся 5-и значений находим

$$\bar{y} = \frac{38{,}69 + 42{,}33 + 64{,}38 + 36{,}43 + 45{,}10}{5} = 45{,}39 \ \text{кг/м}^3$$

$$S^2 = \frac{38{,}69^2 + 42{,}33^2 + 64{,}38^2 + 36{,}43^2 + 45{,}10^2 - 5 \times 45{,}39^2}{4} = 123{,}43 \ \text{кг/м}^3$$

$$S = \sqrt{123{,}43} = 11{,}11 \ \text{кг/м}^3$$

$$t_{расч} = \frac{|75{,}04 - 45{,}39|}{11{,}11} = 2{,}67$$

$t_{табл} = 2{,}78$ для $f = 5 - 1 = 4$ и $q = 0{,}05$

$t_{расч} < t_{табл}$, следовательно, проверяемый результат не является промахом и должен быть возвращен в выборку. Результаты расчетов заносим в таблицу 5.

Таблица 5

Результаты проверки выборок на промахи

Поглощение, кг/м³	Среднее арифметическое выборки $\bar{y}$, кг/м³	Выборочная дисперсия S^2, кг/м³	Стандартное выборочное отклонение S, кг/м³	Значение критерия Стьюдента	
				расчетное $t_{расч}$	табличное $t_{табл}$
1	2	3	4	5	6
1-ый опыт					
75,04	45,39	11,11	2,67	2,78	
38,69					

Продолжение табл. 5

1	2	3	4	5	6
42,33					
64,38					3,18
36,43	53,11	15,77	1,06	2,78	3,18
45,10					
2-ой опыт					
30,44					30,44
26,57					26,57
23,56	31,32	3,73	2,08	3,18	23,56
33,34					33,34
34,95	28,48	4,27	1,52	3,18	34,95
143,29	29,77	4,73	23,99	2,78	***143,29***
3-ий опыт					
34,49					34,49
33,50	39,91	6,75	0,95	3,18	33,50
47,61	36,38	4,82	2,33	3,18	47,61
58,88	38,63	6,49	3,12	2,78	***58,88***
43,55					
4-ый опыт					
20,71					20,71
20,20	28,29	7,94	1,02	3,18	20,20
35,29	24,52	7,02	1,53	3,18	35,29
34,99					34,99
109,98	26,67	7,78	10,71	2,78	***109,98***
22,16					22,16
20,71					20,71

Примечание: курсивом выделены промахи.

Вышеописанные расчеты можно выполнить с помощью пакета программ Microsoft Excel 2010. Для этого нужно создать документ в соответствующем формате. Выбираем закладку «Формулы». В столбце А вносим значения обрабатываемой выборки. Затем удаляем из нее подозреваемый результат (75,04) и для оставшихся значений задаем расчет среднего, выделяя соответствующие ячейки (рис. 2, 3).

Для расчета стандартного отклонения S выделяем ячейку С3 и указываем выполняемое действие. В перечне функций выбираем СТАНДОТКЛОН и опять выделяем ячейки, для которых должен быть проведен расчет (рис. 4 - 7).

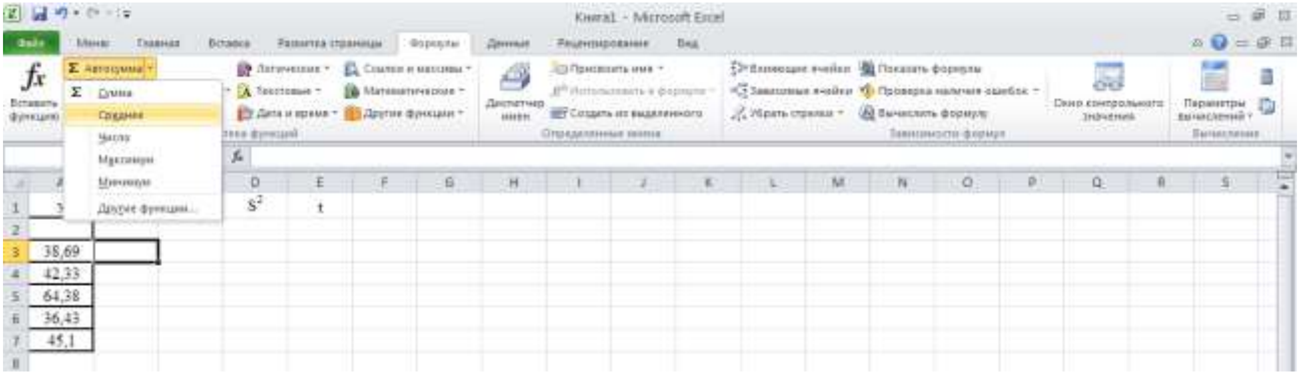

Рис. 2

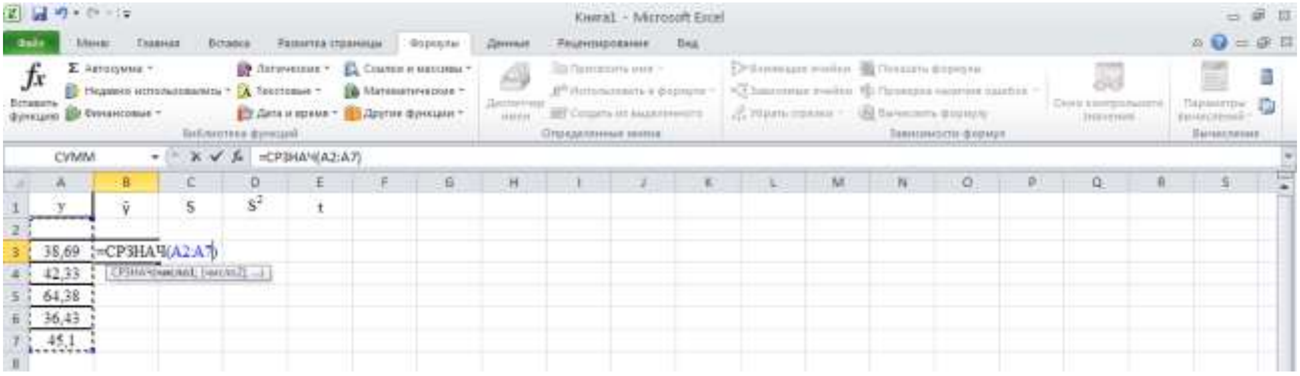

Рис. 3

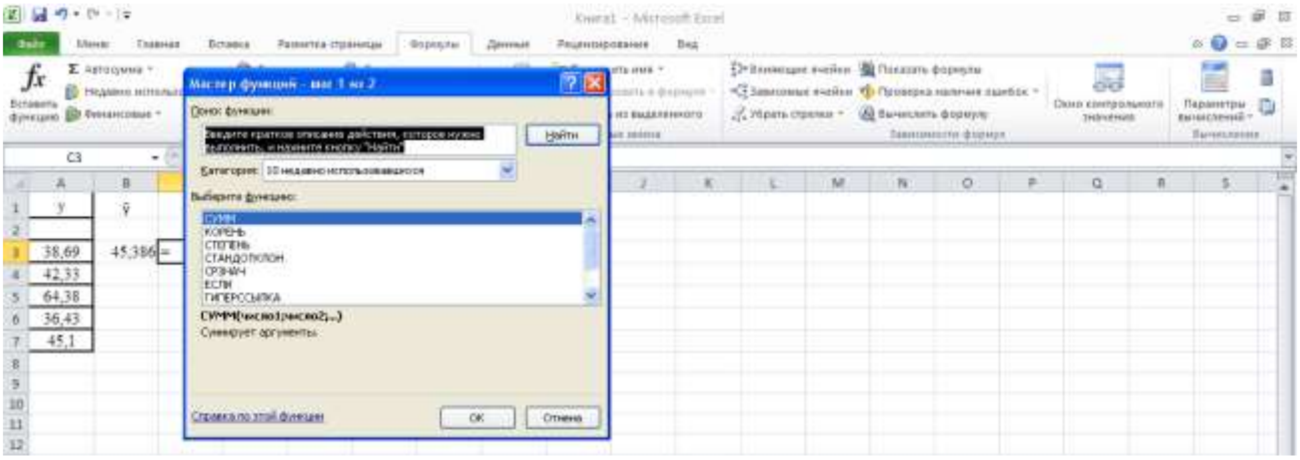

Рис. 4

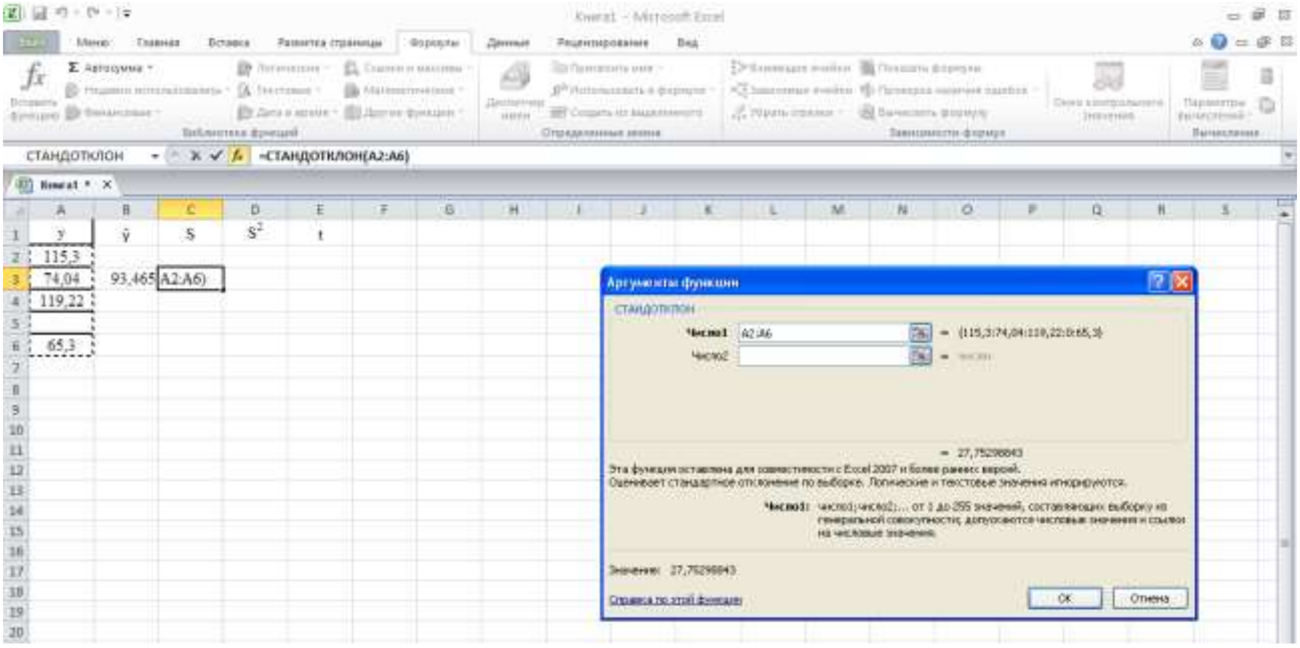

Рис. 5

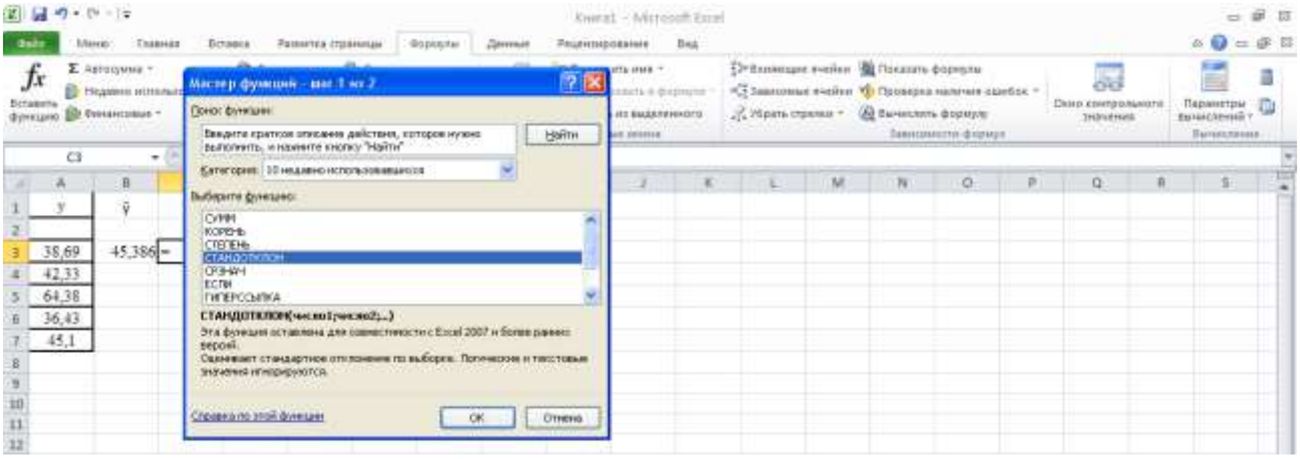

Рис. 6

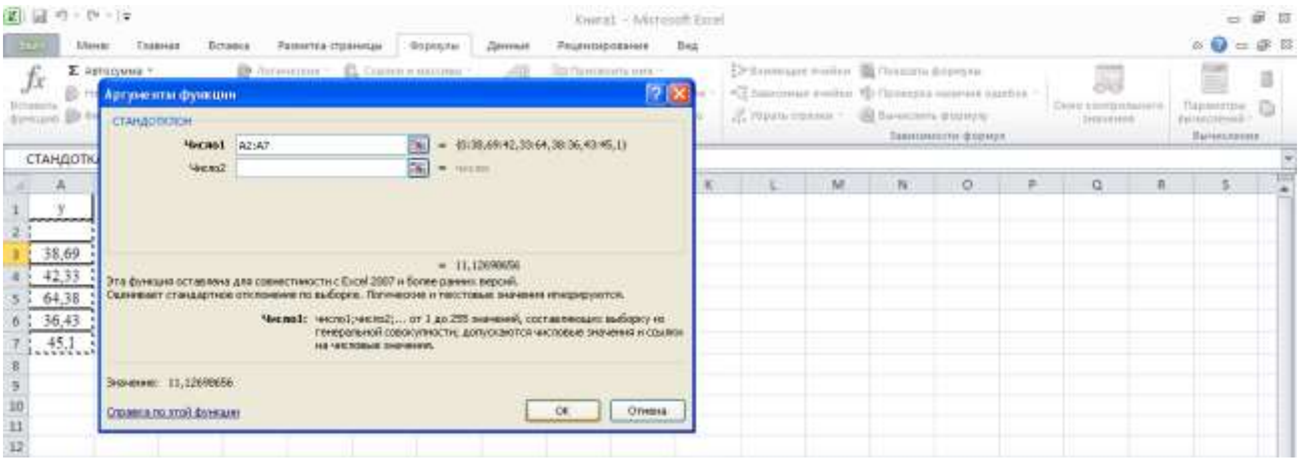

Рис. 7

Чтобы рассчитать выборочную дисперсию S^2, выделяем ячейку D3, в перечне стандартных функций выбираем категорию «Математические», а в их перечне - функцию «Степень» (рис. 8). В появившемся окне «Аргументы функции» в графе «Число» указываем ячейку C3, а в графе «Степень» - 2 (рис. 9, 10).

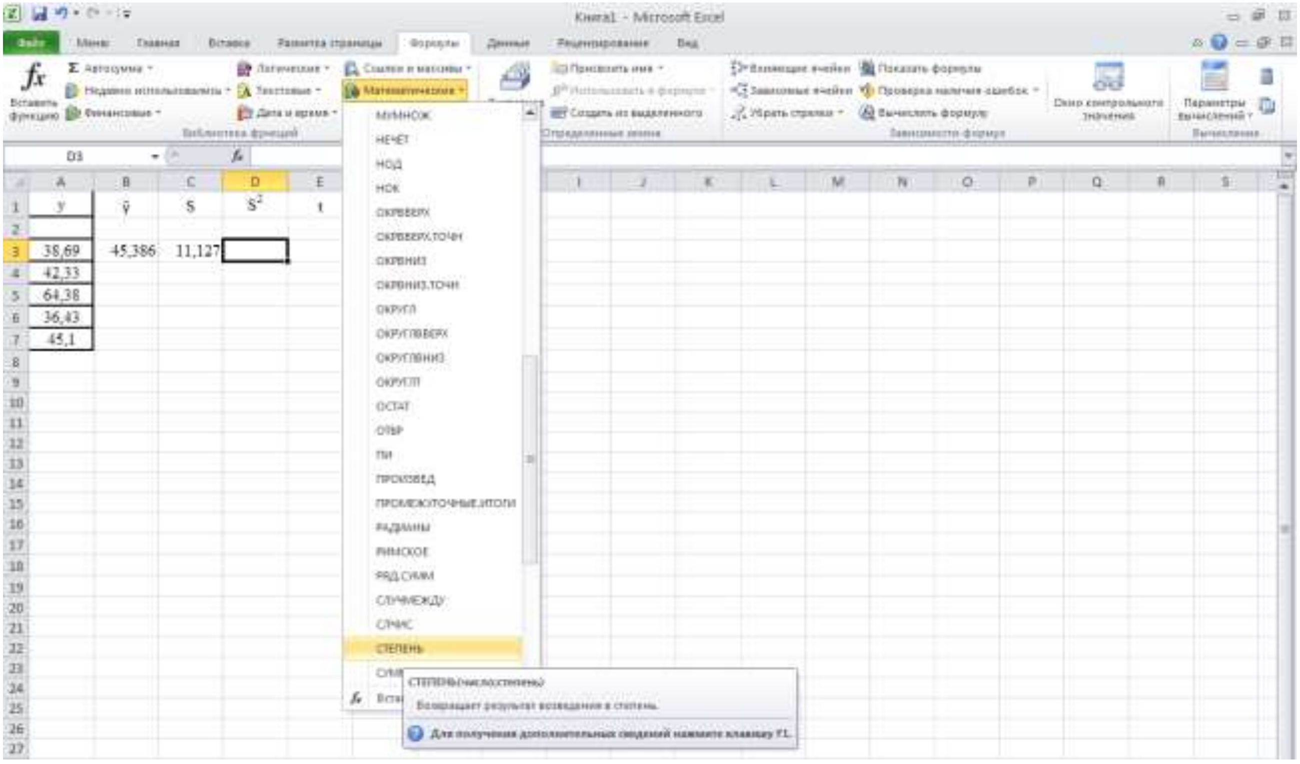

Рис. 8

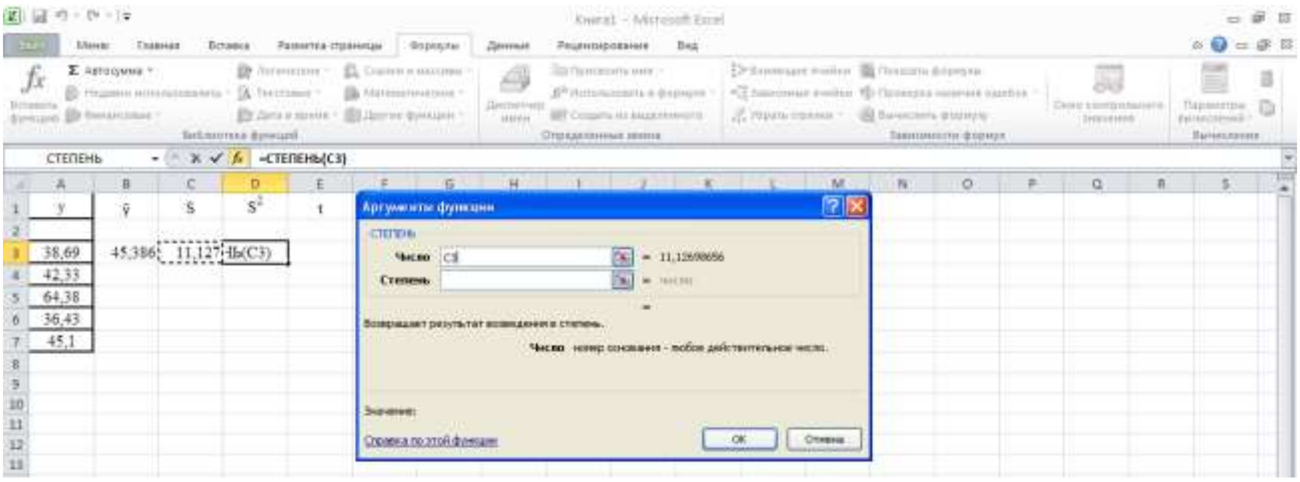

Рис. 9

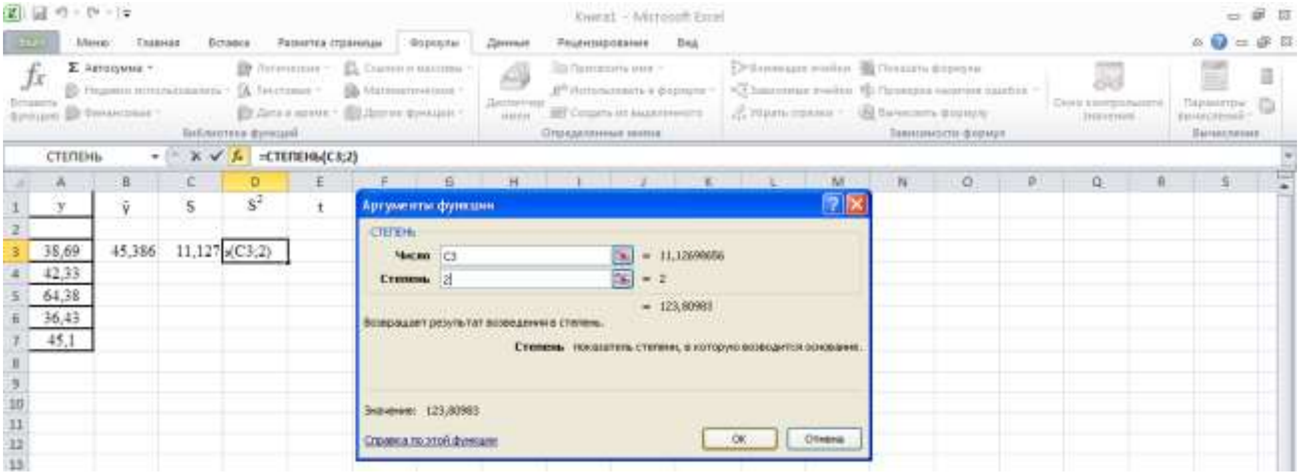

Рис. 10

Чтобы рассчитать критерий Стьюдента, выделяем ячейку E3, а в строке редактора формул после знака = забиваем формулу (рис. 11, 12).

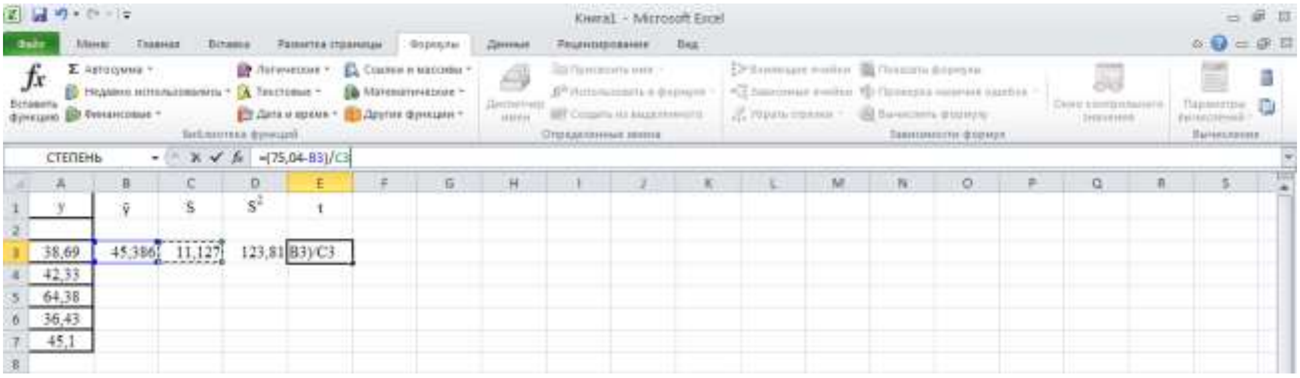

Рис. 11

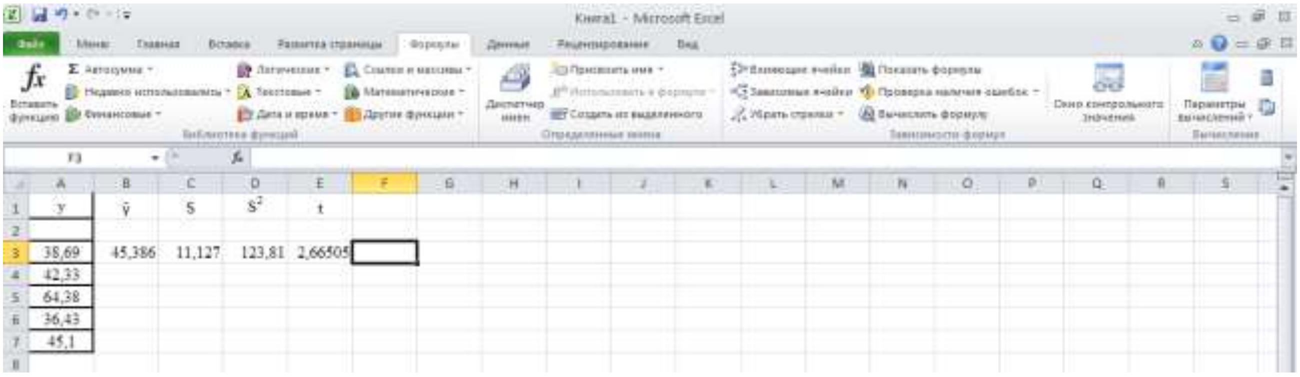

Рис. 12

Результаты расчетов заносим в таблицу 5. Для того чтобы проверить нижнюю границу числового ряда проверяемой выборки, восстанавливаем максимальное значение и удаляем минимальный результат. В редакторе формул ячейки E3 вносим необходимые изменения (рис. 13, 14). Критерий Стьюдента для сравнения с табличным своим значением берется по модулю.

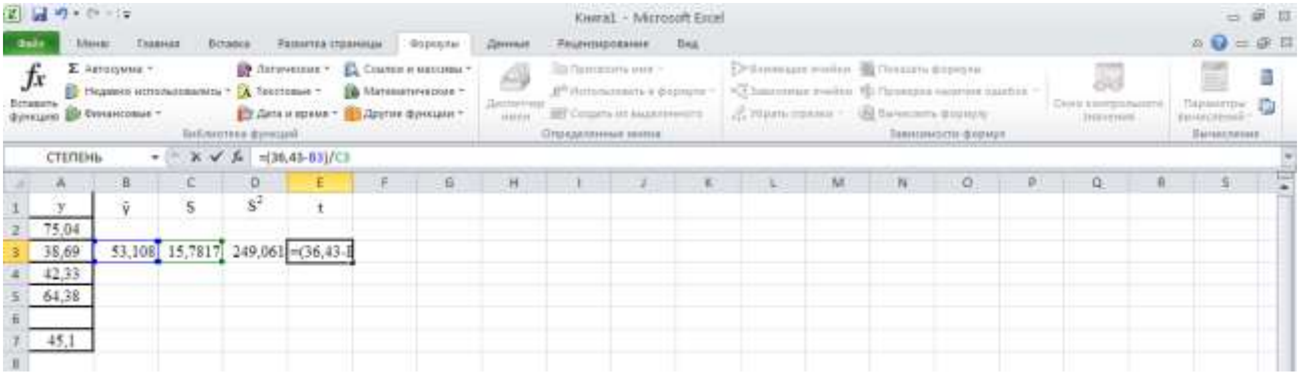

Рис. 13

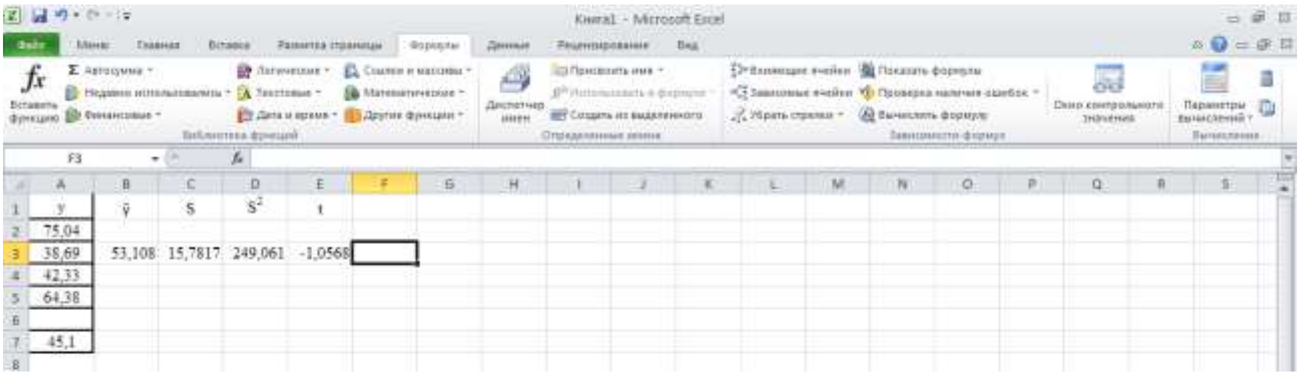

Рис. 14

4.2 Расчет необходимых статистических характеристики выборок

4.2.1 Расчет среднего арифметического

Самым известным вошедшим в практику вариационно-статистическим элементом, характеризующим нормальный вариационный ряд, является среднее арифметическое или просто «среднее», которое для выборки, «очищенной» от грубых наблюдений, рассчитывается по формуле 1.

Найденное $\bar{y}$ называют так же оценкой математического ожидания, или выборочным средним, в отличие от генерального среднего (или математического ожидания), которое можно найти из генеральной совокупности.

Пример:

Так как исследуемая выборка первого опыта не содержала промахов, то расчет производим для всех 5 случайных величин (табл. 3).

$$\bar{y} = \frac{75{,}04 + 38{,}69 + 42{,}33 + 64{,}38 + 36{,}43 + 45{,}10}{6} = 50{,}33\,\textit{кг/м.}^3$$

Так как в ранее созданном документе формата Excel уже есть необходимые формулы, необходимо только восстановить в столбце А все 6 значений выборки и переписать результаты расчетов в таблицу 6 (рис. 15).

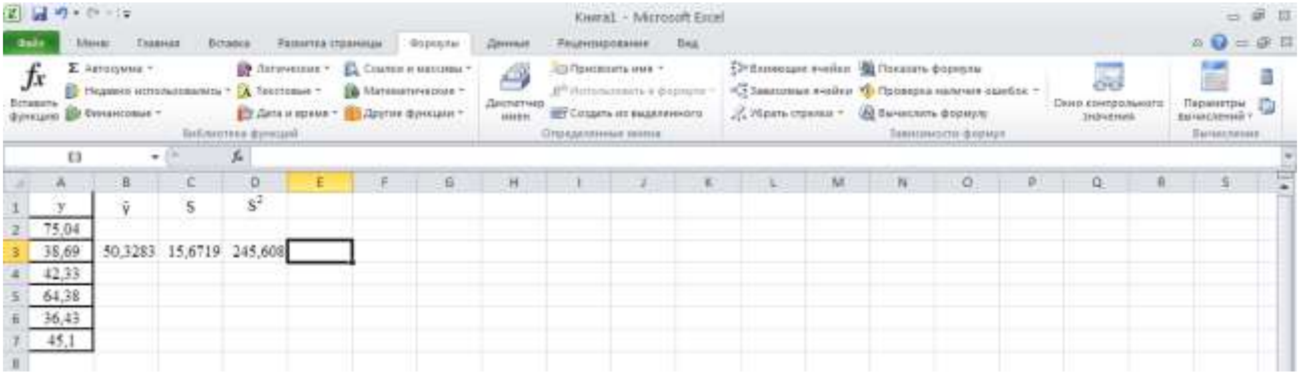

Рис. 15

4.2.2 Расчет выборочного стандартного отклонения

Количественной оценкой величины случайных ошибок исследования является выборочные стандартные отклонения (выборочный стандарт) S, а также выборочная дисперсия S^2.

Выборочный стандарт рассчитывается для «чистой» выборки по формуле 4, а выборочная дисперсия – по формуле 2 (рис. 4 - 10).

Пример:

$$S^2 = \frac{75{,}04^2 + 38{,}69^2 + 42{,}33^2 + 64{,}38^2 + 36{,}43^2 + 45{,}10^2 - 6 \times 50{,}33^2}{5} = 245{,}61\ \textit{кг/м.}^3$$

$$S = \sqrt{245{,}61} = 15{,}67\ \textit{кг/м.}^3$$

Таблица 6

Основные статистические показатели чистых выборок

Поглощение, кг/м^3	Среднее арифметическое выборки $\bar{y}$, кг/м^3	Выборочная дисперсия S^2, кг/м^3	Стандартное выборочное отклонение S	Объем выборки n
1	2	3	4	5
1-ый опыт				
75,04	50,33	245,61	15,67	6
38,69				
42,33				
64,38				
36,43				
45,10				
2-ой опыт				
30,44	29,77	22,39	4,73	5
26,57				
23,56				
33,34				
34,95				
3-ий опыт				
34,49	38,63	42,18	6,50	5
33,50				
47,61				
33,99				
43,55				
4-ый опыт				
20,71	26,67	60,49	7,78	5
20,20				
35,29				
34,99				
22,16				

4.3 Проверка нормальности распределения

В случае, когда изменчивость случайной величины вызвана её зависимостью от большого числа сравнительно незначительных и взаимно независимых факторов, делается вывод о том, что выборка этих величин подчиняется закону нормального распределения.

Приближённая проверка нормальности распределения проводится при помощи показателей асимметрии A и эксцесса E, рассчитываемых по формулам:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^3}{n S^3} \tag{9}$$

$$E = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - \bar{y}\right)^4}{n S^4} - 3 \tag{10}$$

Далее вычисляют среднее квадратическое отклонение для асимметрии σ_A и эксцесса σ_E по формулам:

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)(n+3)}} \tag{11}$$

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24 \cdot n(n-2)(n-3)}{(n-1)^2 (n+3)(n+5)}} \tag{12}$$

Далее проверяют выполнение одновременно 2-х условий

$$\left.\begin{array}{l} \left|\dfrac{A}{\sigma_A}\right| \le 2 \\ \left|\dfrac{E}{\sigma_E}\right| \le 2 \end{array}\right\} \tag{13}$$

Если хотя бы один из показателей A или E по абсолютной величине в 2 или более раз превосходит соответствующее квадратическое отклонение, т.е. не выполняется хотя бы одно из приведенных условий, то следует усомниться в нормальности распределения случайной величины и тогда необходимо осуществить более точную процедуру проверки данной гипотезы с помощью критерия Пирсона. Если подтвердится отрицательный результат, то проведение дальнейших статистических процедур невозможно, а значит, невозможно получить достаточно достоверные выводы на основании данных результатов эксперимента.

<u>Пример:</u>

Проводим проверку нормальности распределения выходной величины (поглощения, *кг/м*^{3}) в первой выборке 1-го опыта (табл. 6)

$$A=\frac{(75{,}04-50{,}33)^3+(38{,}69-50{,}33)^3+(42{,}33-50{,}33)^3+(64{,}38-50{,}33)^3+(36{,}43-50{,}33)^3+(45{,}10-50{,}33)^3}{6\cdot 15{,}67^3}$$

A = 0,56

$$E=\frac{(75{,}04-50{,}33)^4+(38{,}69-50{,}33)^4+(42{,}33-50{,}33)^4+(64{,}38-50{,}33)^4+(36{,}43-50{,}33)^4+(45{,}10-50{,}33)^4}{6\cdot 15{,}67^4}-3$$

E = 1,305

$$\sigma_A=\sqrt{\frac{6(6-1)}{(6+1)(6+3)}}=0{,}69$$

$$\sigma_E=\sqrt{\frac{24\cdot 6(6-2)(6-3)}{(6-1)^2(6+3)(6+5)}}=0{,}836$$

$$\frac{A}{\sigma_A}=\frac{0{,}56}{0{,}69}=0{,}81<2$$

$$\frac{E}{\sigma_E}=\frac{1{,}305}{0{,}836}=1{,}561<2$$

Следовательно, распределение случайных величин в выборке подчиняется нормальному закону.

Вышеописанные расчеты можно выполнить с помощью пакета программ Microsoft Excel 2010. Для этого производим манипуляции аналогичные, приведенным на рисунках 11, 12, забивая необходимые формулы.

4.4 Проверка значимости разницы между статистическими характеристиками различных опытов

4.4.1 Проверка гипотезы об однородности дисперсий

Выборочные дисперсии S^2_i, являющиеся характеристиками выборок, называются однородными, если они являются оценками одной и той же генеральной дисперсии, а различие между ними объясняется влиянием случайных ошибок. В противном случае различие между выборочными дисперсиями значимо.

а) если $n_1 = n_2 = n_i$, то рассчитывают G -критерий Кохрена:

$$G_{расч} = \frac{S^2_{\max}}{\sum_{i=1}^{m} S_j^2} \tag{14}$$

где m - количество выборочных дисперсий, однородность которых проверяется;

S^2_{max} – наибольшая по абсолютной величине дисперсия;

S^2_j – дисперсия j-го опыта.

Далее по уровню значимости q=0,05 , числу степеней свободы выборок $f = n - 1$ и по количеству выборок m из таблицы 3 приложения находят величину $G_{табл}$. Если $G_{расч} < G_{табл}$, то можно принять гипотезу об однородности дисперсий. В противном случае она отвергается.

б) если $n_1 \neq n_i$ и сравнивается более 2-х выборок, то рассчитывается критерий Бартлетта.

Предварительно вычисляют величину дисперсии воспроизводимости $S^2\{y\}$ по формуле

$$S^2\{y\} = \frac{\sum_{j=1}^{N} S_j^2 \cdot f_j}{\sum_{j=1}^{N} f_j} \tag{16}$$

где N – число опытов, проводимых в рамках эксперимента;

f_j – числа степеней свободы соответствующих дисперсий, $f_j = n_j - 1$.

Далее рассчитывают величину B, равную отношению

$$B = \frac{V}{C} \tag{17}$$

$$V = 2{,}303\left[\left(\sum_{j=1}^{N} f_j\right)\lg S^2\{y\} - \sum_{j=1}^{N} f_j \lg S_j^2\right] \tag{18}$$

$$C = 1 + \frac{\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{f_j} - \frac{1}{\sum_{j=1}^{N} f_j}}{3(N-1)} \tag{19}$$

Затем из таблиц распределения Пирсона (табл. 4 приложения) при уровне значимости $q=0{,}05$ и числе степеней свободы $k=N-1$ отыскивают значение $\chi^2_{табл}$. Если $B \le \chi^2_{табл}$, то дисперсии однородны.

Пример:

Объемы сравниваемых 4-х выборок не равны (табл. 6), поэтому для проверки используем критерий Пирсона

$$S^2\{y\} = \frac{5\cdot 245{,}61 + 4\cdot 22{,}39 + 4\cdot 42{,}18 + 4\cdot 60{,}49}{17} = 101{,}66$$

$$V = 2{,}303\cdot(17\cdot\lg 101{,}66 - (5\cdot\lg 245{,}61 + 4\cdot\lg 22{,}39 + 4\cdot\lg 42{,}18 + 4\cdot\lg 60{,}49)) = 7{,}24$$

$$C = 1 + \frac{1}{3\cdot(4-1)}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{17}\right) = 1{,}1$$

$$B = \frac{7{,}24}{1{,}1} = 6{,}59$$

Из таблицы 4 приложения для уровня значимости $q=0,05$ и числа степеней свободы выборок $k = 4 - 1$ критерий Пирсона $\chi^2_{табл} = 7,81$.

Так как $B < \chi^2_{табл}$, то можно принять гипотезу об однородности дисперсий, т.е. различие между ними объясняется влиянием лишь случайных ошибок.

4.4.2 Проверка однородности средних выборочных

Данная процедура позволяет установить, вызвано ли расхождение между средними арифметическими выборок случайными ошибками измерения или оно связано с влиянием каких-либо неслучайных факторов. Проверка производится с применением t - критерия Стьюдента.

а) если $n_1 \neq n_2$ и дисперсии однородны, то расчетный критерий Стьюдента определяется по формуле:

$$t_{расч} = \frac{|\bar{y}_1 - \bar{y}_2|}{\sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)\left[\frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}\right]}} \qquad (20)$$

Табличное значение $t_{табл}$ находят из таблицы 1 распределения Стьюдента для уровня значимости $q=0,05$ и числе степеней свободы $f=n_1+n_2-2$ (см. приложение). Если $t_{расч} > t_{табл}$, то расхождение между средними значимо. В противном случае принимают гипотезу об однородности средних арифметических.

б) если $n_1 = n_2$ и дисперсии однородны, то $t_{расч}$ определяют по формуле:

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2}{n}}} \qquad (21)$$

в) если $n_1 \neq n_2$ и дисперсии неоднородны, то $t_{расч}$ определяют по формуле:

$$t_{расч} = \frac{\left|\overline{y_1} - \overline{y_2}\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \tag{22}$$

Число степеней свободы в этом случае определяют в этом случае по формуле:

$$f = \frac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1+1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2+1}} - 2 \tag{23}$$

Пример:

Учитывая, что предыдущая проверка (п. 4.5.1) подтвердила гипотезу об однородности дисперсий сравниваемых выборок (табл. 6), рассчитываем критерий Стьюдента по формуле, используя в формуле наибольшее и наименьшее из 4-х средних выборочных и соответствующие им дисперсии и объемы

$$t_{расч} = \frac{|50{,}33 - 26{,}67|}{\sqrt{(\frac{1}{6} + \frac{1}{5})\left[\frac{(6-1)\cdot 245{,}61^{12} + (5-1)\cdot 60{,}49^2}{6+5-2}\right]}} = 0{,}21$$

Для уровня значимости $q=0{,}05$ и числа степеней свободы $f=6+5-2$ (табл. 1 приложения) $t_{табл}=2{,}26$. Так как $t_{расч} < t_{табл}$, то принимаем гипотезу об однородности средних, т.е. расхождение между ними незначимо и вызвано лишь наличием случайных ошибок измерения. Следовательно, полученные экспериментальные данные можно использовать для получения уравнения регрессии.

4.5 Расчет коэффициентов регрессии и проверка их значимости

Частным случаем математической модели является уравнение регрессии, которое позволяет получить информацию о самом объекте исследования и способах управления им. С его помощью можно легко оценить характер влияния каждого из варьируемых факторов на выходную величину, также оно может послужить основой для оптимизации исследуемого объекта.

Линейное уравнение регрессии имеет вид

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{k} b_i x_i + \sum_{i,j=1}^{k} b_{ij} x_i x_j, \tag{24}$$

где k – число переменных факторов;

b_0, b_i, b_{ij} – коэффициенты регрессии.

Коэффициенты регрессии рассчитываются методом наименьших квадратов по формуле:

$$b_i = \frac{\sum_{i,j=1}^{k,N} x_{ij} \bar{y}_j}{N} \tag{25}$$

$$b_0 = \frac{\sum_{j=1}^{N} \bar{y}_j}{N}, \tag{26}$$

где x_{ij} – уровень i-го переменного фактора в нормированном выражении в j-ом опыте;

$\bar{y}_j$ – среднее выборочное значение выходной величины в j-ом опыте;

N - число опытов, поставленных согласно плану эксперимента.

Коэффициенты при независимых переменных факторах указывают на степень и характер влияния соответствующего фактора на выходную величину и исследуемый объект в целом. Чем больше абсолютная величина коэффициента, тем больше влияние он оказывает. Если коэффициент имеет знак (+), то он оказывает прямое влияние на выходную величину, т.е. с увеличением значения соответствующего переменного фактора x_i отклик y также возрастает. Если же коэффициент получился отрицательный, то влияние – обратное, т.е. с увеличением значения соответствующего переменного фактора x_i отклик y убывает.

После получения уравнения регрессии еще нельзя сказать насколько достоверно оно описывает результаты эксперимента. Для этого проводят проверку адекватности уравнения. Учитывая, что данную процедуру можно проводить только для ненасыщенных планов, у которых количество опытов должно превышать число коэффициентов уравнения регрессии. С этой целью либо заранее задаются меньшим числом коэффициентов, либо из уравнения исключают незначимые коэффициенты вместе с соответствующими переменными.

Процедура проверки значимости коэффициентов регрессии начинается с определения дисперсии воспроизводимости по формуле 16

Для оценки коэффициентов регрессии используют дисперсию коэффициентов.

$$S^2(b_i) = \frac{S^2\{y\}}{\sum_{j=1}^{N} n_j} \tag{27}$$

где n_j - объм выборки j-го опыта

$$S(b_i) = \sqrt{S^2(b_i)} \tag{28}$$

После этого для каждого коэффициента регрессии рассчитывается критерий Стьюденда.

$$t_{расч} = \frac{|b_i|}{S(b_i)} \qquad (29)$$

Для уровня значимости $q=0,05$ и числа степеней свободы $f = \sum_{j=1}^{N} f_j$ из таблицы 1 приложения определяют $t_{табл}$.

Если $t_{расч} \geq t_{табл}$, то коэффициент регрессии значим. Чем больше значение $t_{расч}$, тем большее влияние оказывает соответствующий этому коэффициенту переменный фактор на выходную величину. В противном случае коэффициент регрессии не значим, и соответствующий член в уравнении регрессии может быть отброшен.

После отбрасывания незначимых коэффициентов регрессии желательно снова воспользоваться методом наименьших квадратов для уточнения оставшихся значимых коэффициентов.

Пример:

Линейная математическая модель для двух переменных факторов будет иметь вид:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$$

На основании статистической обработки результатов эксперимента матрицу эксперимента (табл. 2) можно преобразовать следующим образом:

Таблица 7

№ опыта (N_j)	x_1	x_2	$\bar{y}_j$
1	+	+	50,33
2	–	+	29,77
3	+	–	38,63
4	–	–	26,67

Следовательно,

b_0 = (50,33+29,77+38,63+26,67) /4 =36,35

b_1=[(+1)·50,33 + (–1)·29,77 + (+1)·38,63+ (–1)·26,67)]/4 =8,13

b_2 =[(+1)·50,33 + (+1)·29,77 + (–1)·38,63+ (–1)·26,67)]/4 = 3,7

Уравнение регрессии будет выглядеть следующим образом:

$y = 36{,}35 + 8{,}13x_1 + 3{,}7x_2$

Для проверки значимости коэффициентов регрессии рассчитаем дисперсию воспроизводимости

$$S^2\{y\} = \frac{245{,}61\cdot 5 + 22{,}39\cdot 4 + 42{,}18\cdot 4 + 60{,}49\cdot 4}{17} = 101{,}66$$

$$S^2(b) = \frac{101{,}66}{6+5+5+5} = 4{,}84$$

$$S(b) = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

Проводить проверку значимости коэффициента b_0 не целесообразно, т.к. он является средним всех значений выходной величины во всех опытах.

$t_{расч\ 1}$= 8,13/2,2=3,965

$t_{расч\ 2}$= 3,7/2,2=1,68

Для уровня значимости $q=0{,}05$ и числа степеней свободы $f = 5+4+4+4$ методом интерполяции находим $t_{табл} = 2{,}11$. На основании сравнения делаем вывод о том, что коэффициент b_1 является значимым, а b_2 - не значим, но отбросить его нельзя, т.к. фактор x_2 является одним из основных факторов режима пропитки.

4.7 Проверка адекватности уравнения регрессии

Процедура проверки адекватности результатам эксперимента полученного уравнения регрессии начинается с определения дисперсии адекватности

$$S_{ад}^2 = \frac{\sum_{j=1}^{N} n_j \sum_{j=1}^{N} (\bar{y}_j - \hat{y}_j)^2}{N - p} \qquad (30)$$

где $\hat{y}_j$ - значение выходной величины для j-го опыта, рассчитанное по уравнению регрессии;

p – число коэффициентов в уравнении регрессии.

$$\hat{y}_i = b_0 + \sum_{i,j=1}^{k,N} b_i x_{ij} \quad , \qquad (31)$$

где b_0 - расчетное значение коэффициента b_0;

b_i - расчетное значение коэффициента при i-ом переменном факторе;

x_{ij} - нормированное значение i-го переменного фактора в j-ом опыте.

Уравнение регрессии считается адекватным, если дисперсии адекватности $S^2_{ад}$ и воспроизводимости $S^2\{y\}$ однородны. Для установления данного обстоятельства рассчитывают критерий Фишера

$$F_{расч} = \frac{S_{ад}^2}{S^2\{y\}} \qquad (32)$$

Далее из таблиц распределения Фишера для уровня значимости

$q = 0{,}05$ и степеней свободы $f_y = \sum_{j=1}^{N} f_j$ и $f_{ад} = N - p$ находят $F_{табл}$. Если $F_{расч} < F_{табл}$, то делается вывод, что проверяемая модель адекватна.

Учитывая, что дисперсия адекватности характеризует собой расхождения между результатами эксперимента $\bar{y}_j$ (формула 30) и значениями выходной величины, рассчитанными по уравнению регрессии $\hat{y}_j$. Уравнение считается адекватным, если расхождение между этими значениями вызвано лишь экспериментальными ошибками, а не связано, например, с неудачным выбором математической модели.

Если проведенная проверка показала, что уравнение регрессии неадекватно, тогда нужно:

1) ввести в математическую модель эффекты взаимодействий;
2) перейти к квадратичной модели и ввести x^2_i, т.е. рассмотреть другие планы;
3) провести еще раз эксперимент, уменьшив интервалы варьирования переменных факторов.

Пример:

Было получено уравнение регрессии вида (см. п. 4.6)

$y = 36,35 + 8,13x_1 + 3,7x_2$

Определим расчетные значения выходной величины в опытах $\hat{y}_j$. Номинальные значения переменных факторов в опытах определяются по таблице 7.

$$\hat{y}_1 = 36,35 + 8,13 \cdot (+1) + 3,7 \cdot (+1) = 48,18$$

$$\hat{y}_2 = 36,35 + 8,13 \cdot (-1) + 3,7 \cdot (+1) = 31,92$$

$$\hat{y}_3 = 36,35 + 8,13 \cdot (+1) + 3,7 \cdot (-1) = 40,78$$

$$\hat{y}_4 = 36,35 + 8,13 \cdot (-1) + 3,7 \cdot (-1) = 24,52$$

Тогда дисперсия адекватности будет равна

$$S^2_{ад} = \frac{21 \cdot \left[6 \cdot (50,33 - 48,18)^2 + 5 \cdot (29,77 - 31,92)^2 + 5 \cdot (38,63 - 40,78)^2 + 5 \cdot (26,67 - 24,52)^2\right]}{4 - 3} = 387,86$$

$$F_{расч} = \frac{387,86}{101,66} = 3,82$$

При уровне значимости $q=0,05$ и числе степеней свободы $f_y=17$, $f_{ад}=1$ методом интерполяции получили, что $F_{табл} = 4,464$.

Так как $F_{расч} < F_{табл}$, то можно сделать вывод о том, что уравнение регрессии вида $y=36,35+8,13x_1+3,7x_2$ адекватно описывает исследуемый процесс.

4.8 Анализ результатов эксперимента

На основе полученного уравнения регрессии $y=36,35+8,13x_1+3,7x_2$ можно сделать следующие выводы:

1) Циклическое импульсное разрежение обеспечивает в среднем величину поглощения 36,35 кг/м^3 в пределах исследуемых диапазонов.

2) При осуществлении стадии вакуумирования в режиме пропитки длительность воздействия разрежения имеет более значимое прямое воздействие на величину поглощения y , которое будет возрастать при возрастании длительности вакуумирования x_1 от 5 до 15 мин ($t_{расч\ 1}= 3,965 > t_{табл}= 2,11$).

3) Количество циклов вакуумирования оказывает менее значимое прямое воздействие. Величина поглощения y будет возрастать при увеличении циклов вакуумирования x_2 от 1 до 3 ($t_{расч\ 2}=1,68 < t_{табл}= 2,11$).

4) Расчетные значения выходной величины при разных значениях факторов равны: $\hat{y}_1 = 48,18$, $\hat{y}_2 = 31,92$, $\hat{y}_3\ 40,78$, $\hat{y}_4 = 24,52$. *кг/м*^{3}.

Расхождение между экспериментальными и расчетными значениями составляет 4,3%.

5) Наибольшее поглощение антисептика обеспечивается тремя циклами вакуумирования продолжительностью 15 минут и составляет П=50,33 *кг/м*^{3}.

6) Можно получить уравнение регрессии в натуральном виде, воспользовавшись фомулами перехода

$$x_i = \frac{X_i - X_i^0}{\Delta_i}, \qquad (33)$$

где x_i - нормированное значение i-го переменного фактора;

X_i - натуральное значение i-го переменного фактора;

$X^0{}_i$ - основной уровень i-го переменного фактора;

Δ_i - интервал варьирования i-го переменного фактора.

Воспользовавшись данными таблицы 3 получили, что

$$x_1 = \frac{X_1 - 10}{5}$$

$$x_2 = \frac{X_2 - 2}{1}$$

Тогда уравнение регрессии примет вид

$$y = 36{,}35 + 8{,}13\frac{X_1 - 10}{5} + 3{,}7\,\frac{X_2 - 2}{1}$$

После проведения процедур упрощения и приведения подобных получим

$$y=32{,}35+1{,}63X_1+3{,}7X_2.$$

На основе полученного уравнения регрессии в натуральном виде можно построить графики зависимостей поглощения (y) от продолжительности вакуумирования (x_1) и количества циклов вакуумирования (x_2). Наиболее простым изображением являются плоскостные двухмерные графики. Для их получения все переменные факторы, кроме одного, примем равными 0. Таким образом, имеем следующие зависимости:

$y=32{,}35+1{,}63X_1$

$y=32,35+3,7X_2$

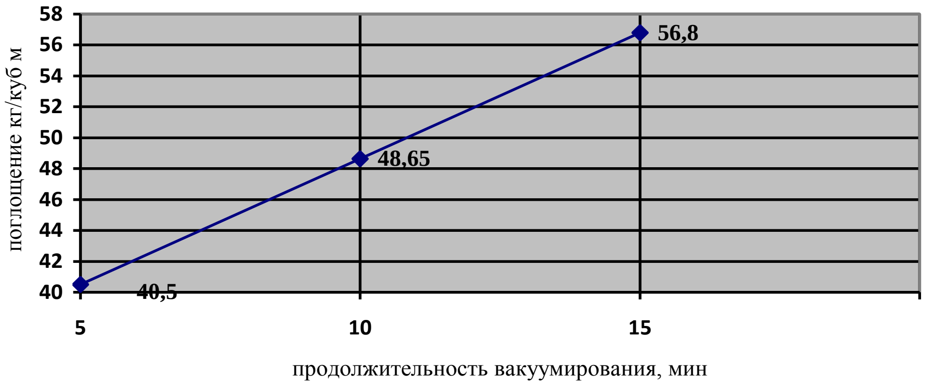

Рис. 16. График зависимости величины поглощения от продолжительности вакуумирования

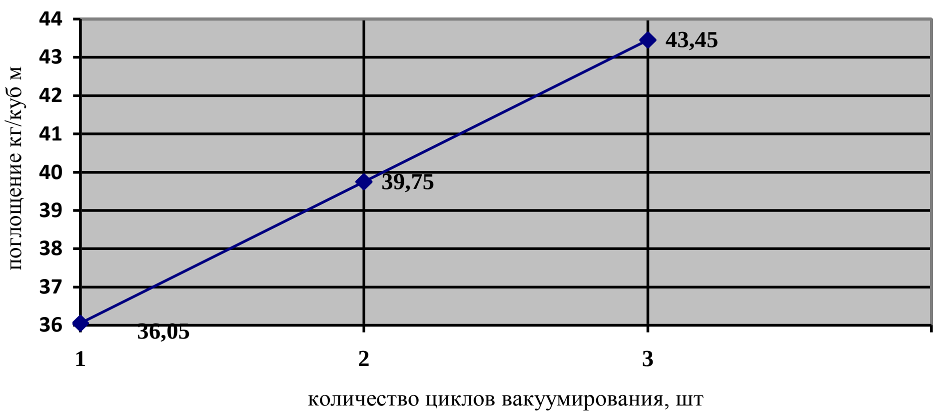

Рис. 17. График зависимости величины поглощения от количества циклов вакуумирования

Графики можно построить в пакете программ Microsoft Word, например, в версии 2010. Для этого в закладке «Вставка» выбрать иллюстрацию «Диаграмма». В появившейся верхней линейке нажать кнопку «Тип диаграммы» и выбрать «График» (рис. 18, 19). В таблице базы данных внести изменения в соответствии с таблицей 5. Оставляя курсив наведенным на график, нажать на правую кнопку мышки. В появившемся окне выбрать команду «Параметры диаграммы» (рис. 19).

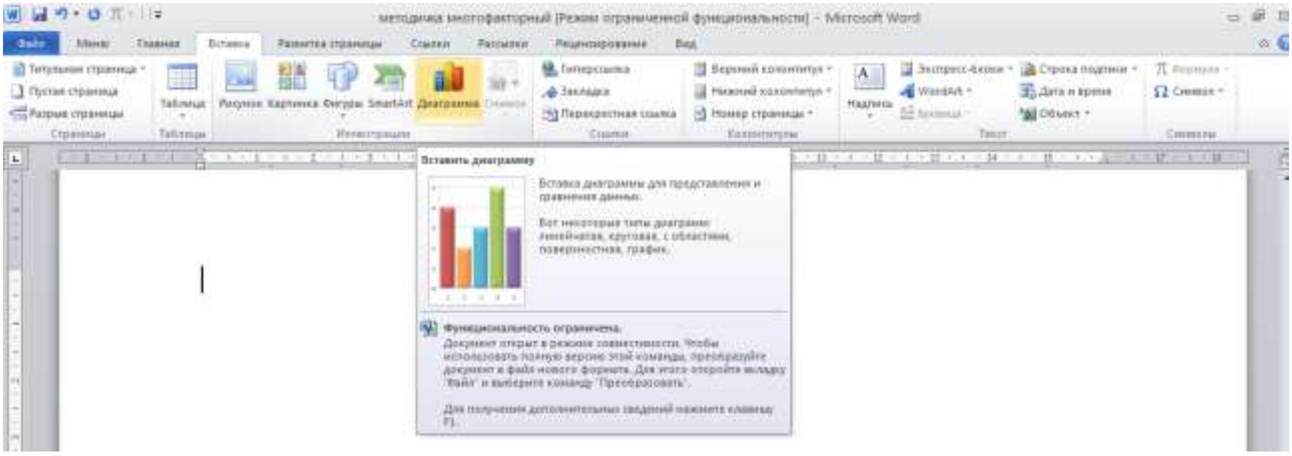

Рис. 18

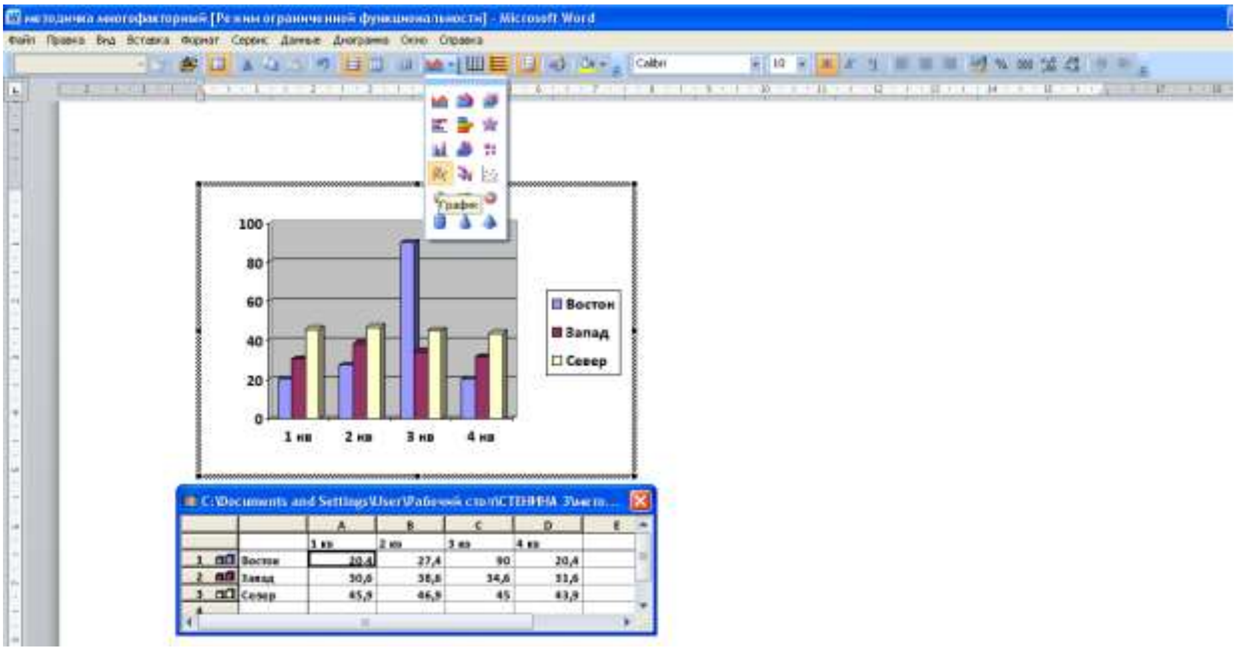

Рис. 19

Используя кнопки окна «Параметры диаграммы», отредактировать график (рис. 20). Оформить подписи осей и т.д. (рис.21, 22). Провести редактирование графика, задавая формат осей, шрифт и т.п. (рис. 23 - 25). Аналогичным образом задается формат названия оси (рис. 26), основные линии сетки оси значений (рис. 27 – 29).

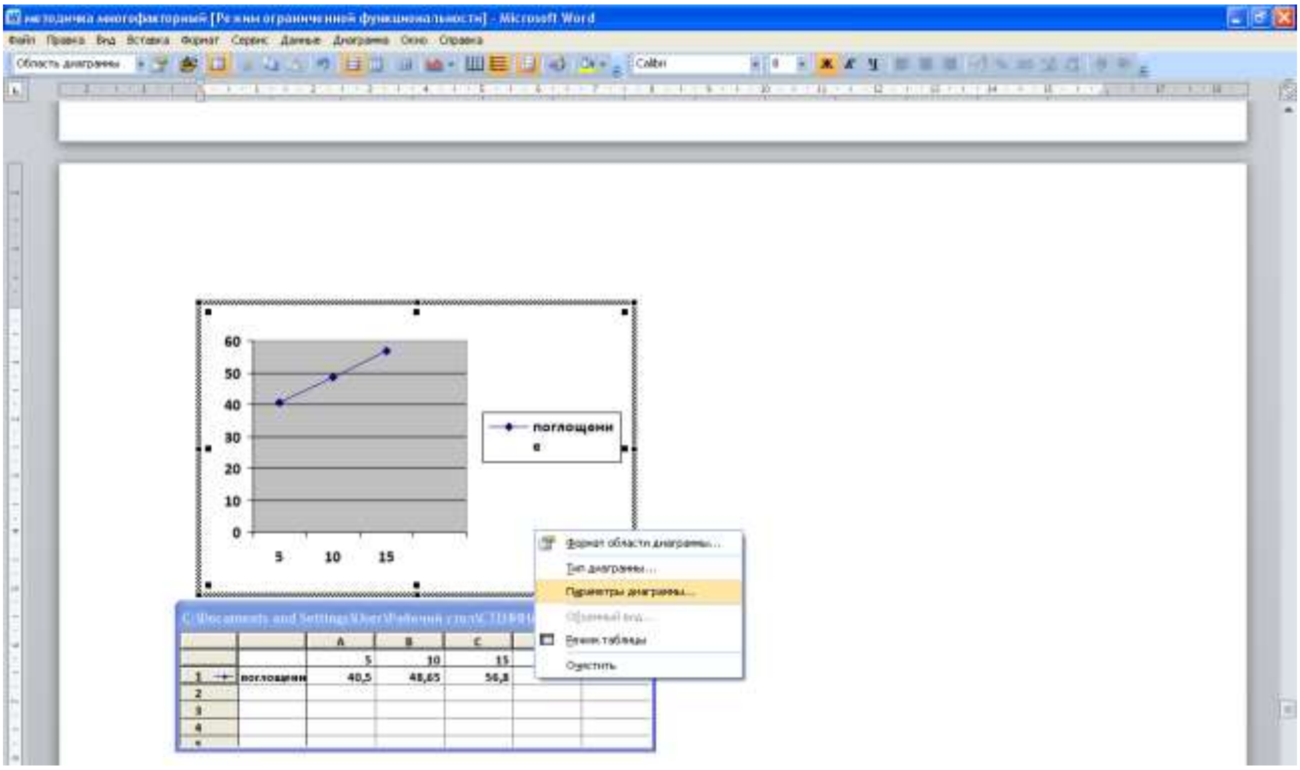

Рис. 20

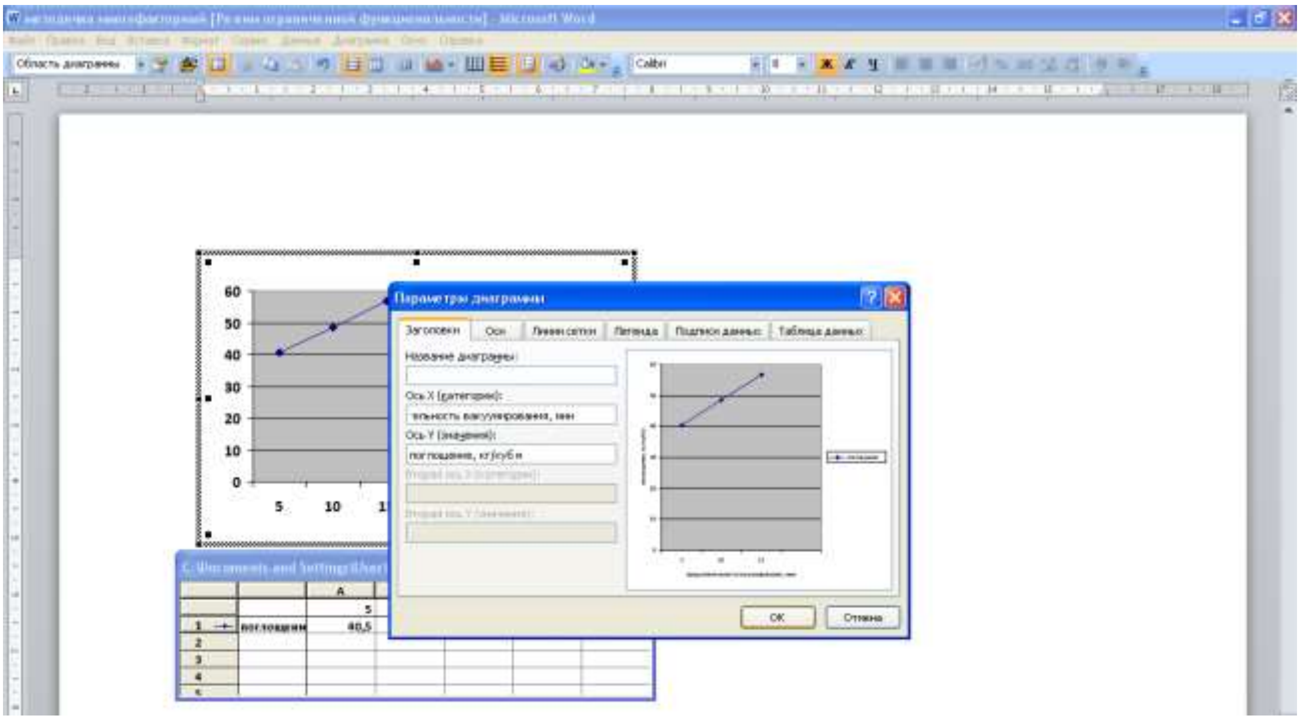

Рис. 21

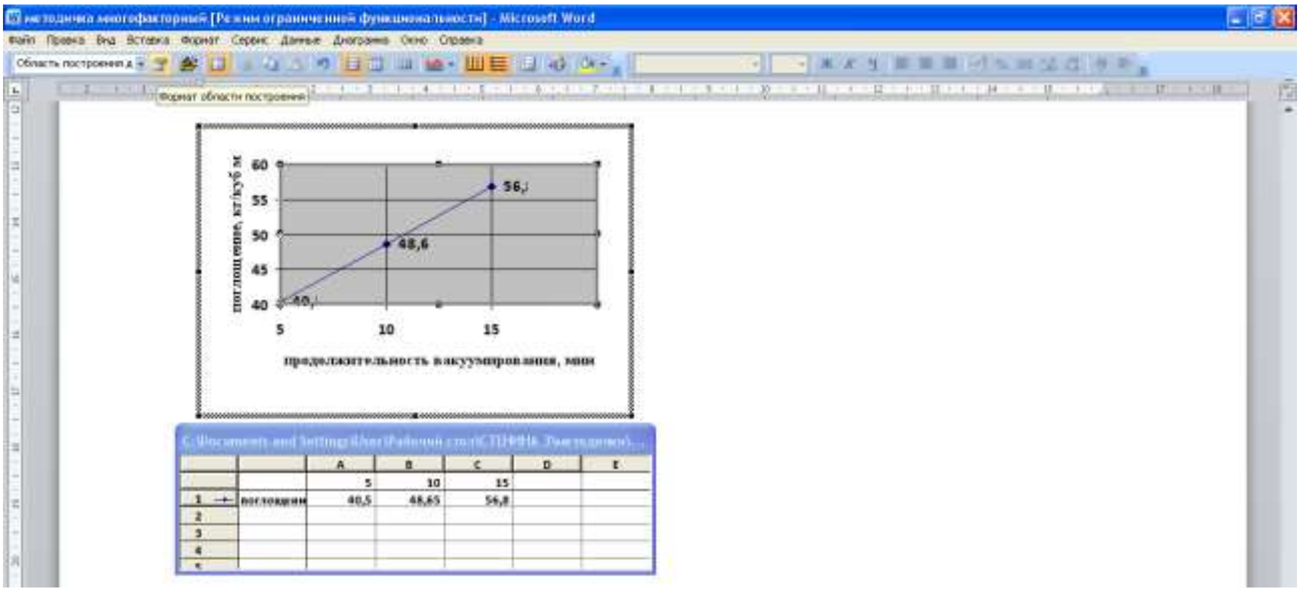
Microsoft Word
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Диаграмма Окно Справка
Формат области построения
поглощение, кг/куб м
60
55
50
45
40
5
10
15
48,6
продолжительность вакуумирования, мин
A
B
C
D
E
5
10
15
поглощени
40,5
48,65
56,8

Рис. 22

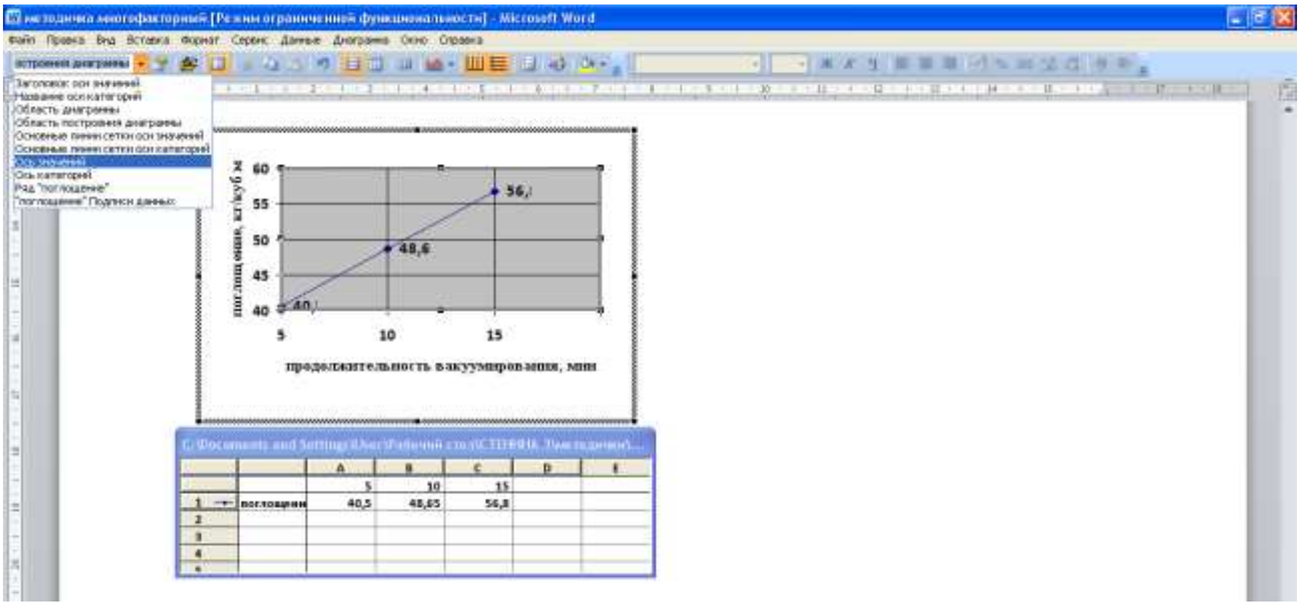
Microsoft Word
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Диаграмма Окно Справка
Область построения диаграммы
Основные линии сетки оси значений
Основные линии сетки оси категорий
Ось значений
Ось категорий
поглощение, кг/куб м
60
55
50
45
40
5
10
15
48,6
продолжительность вакуумирования, мин
A
B
C
D
E
5
10
15
поглощени
40,5
48,65
56,8

Рис. 23

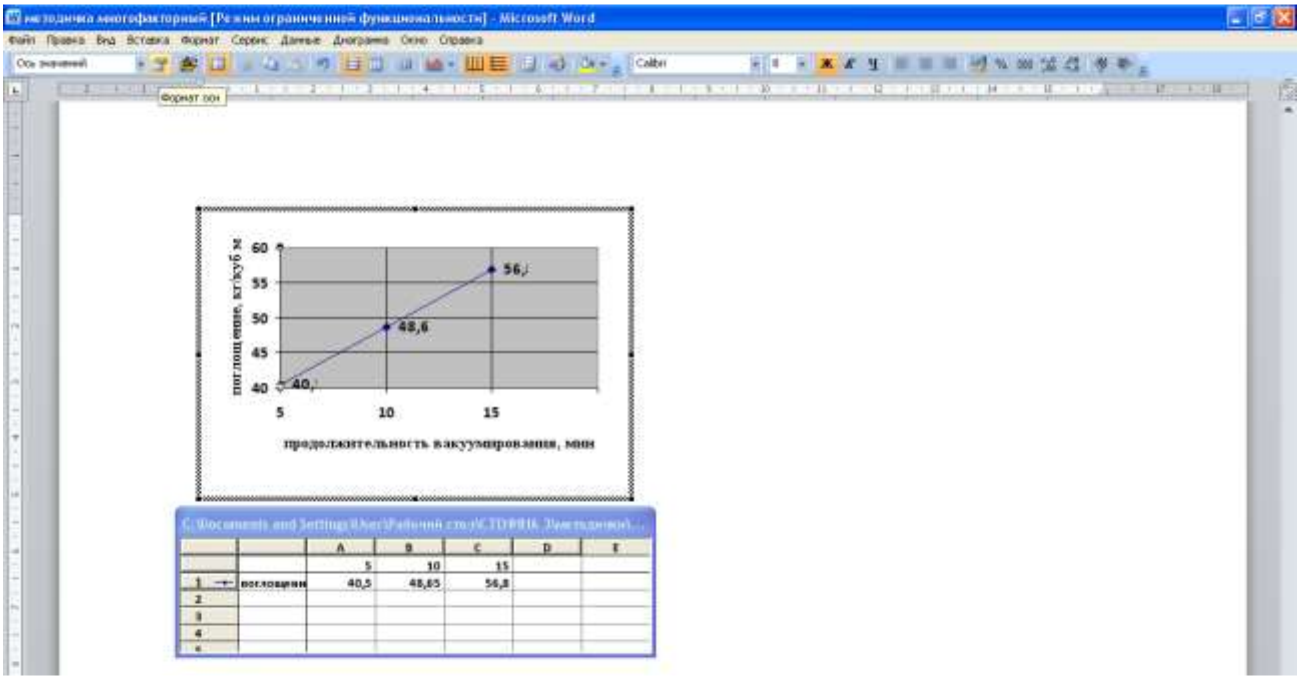
60
55
50
45
40
56,
48,6
40,
5
10
15
поглощение, кг/куб м
продолжительность вакуумирования, мин

Рис. 24

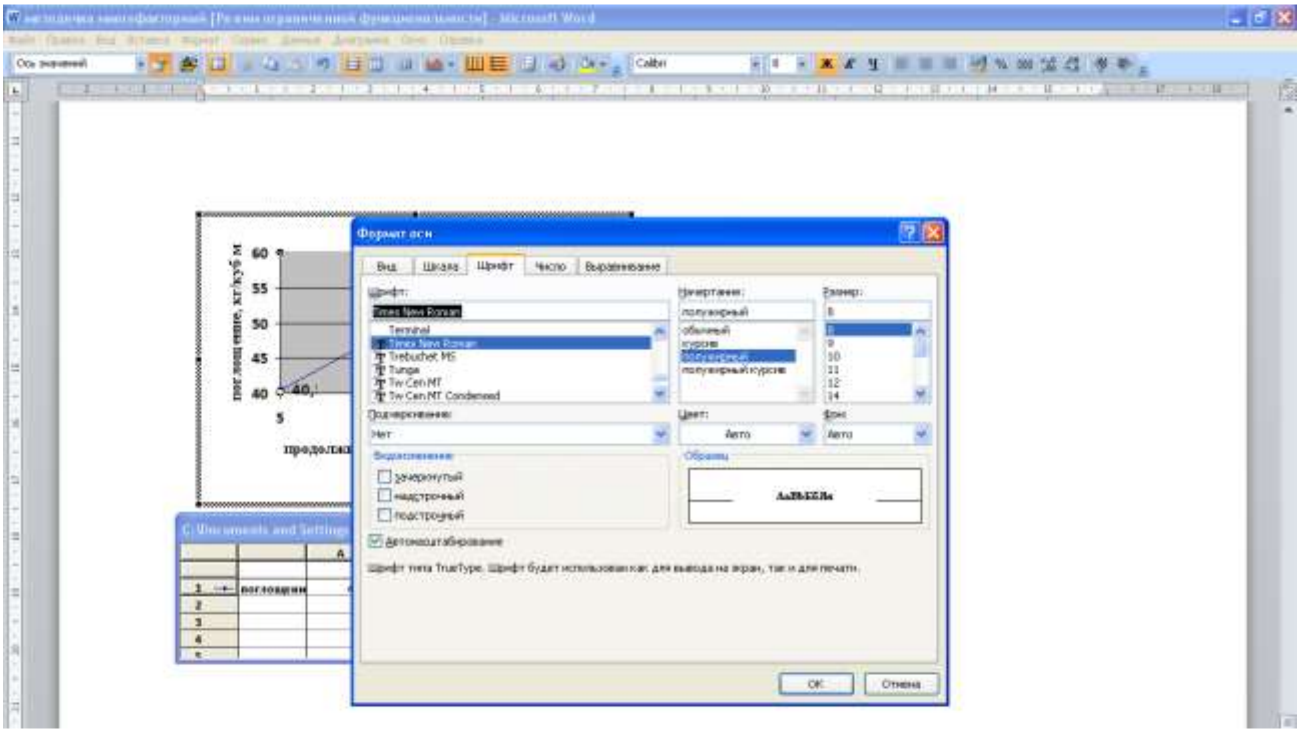
Формат оси
Вид
Шкала
Шрифт
Число
Выравнивание
Times New Roman
ОК
Отмена

Рис. 25

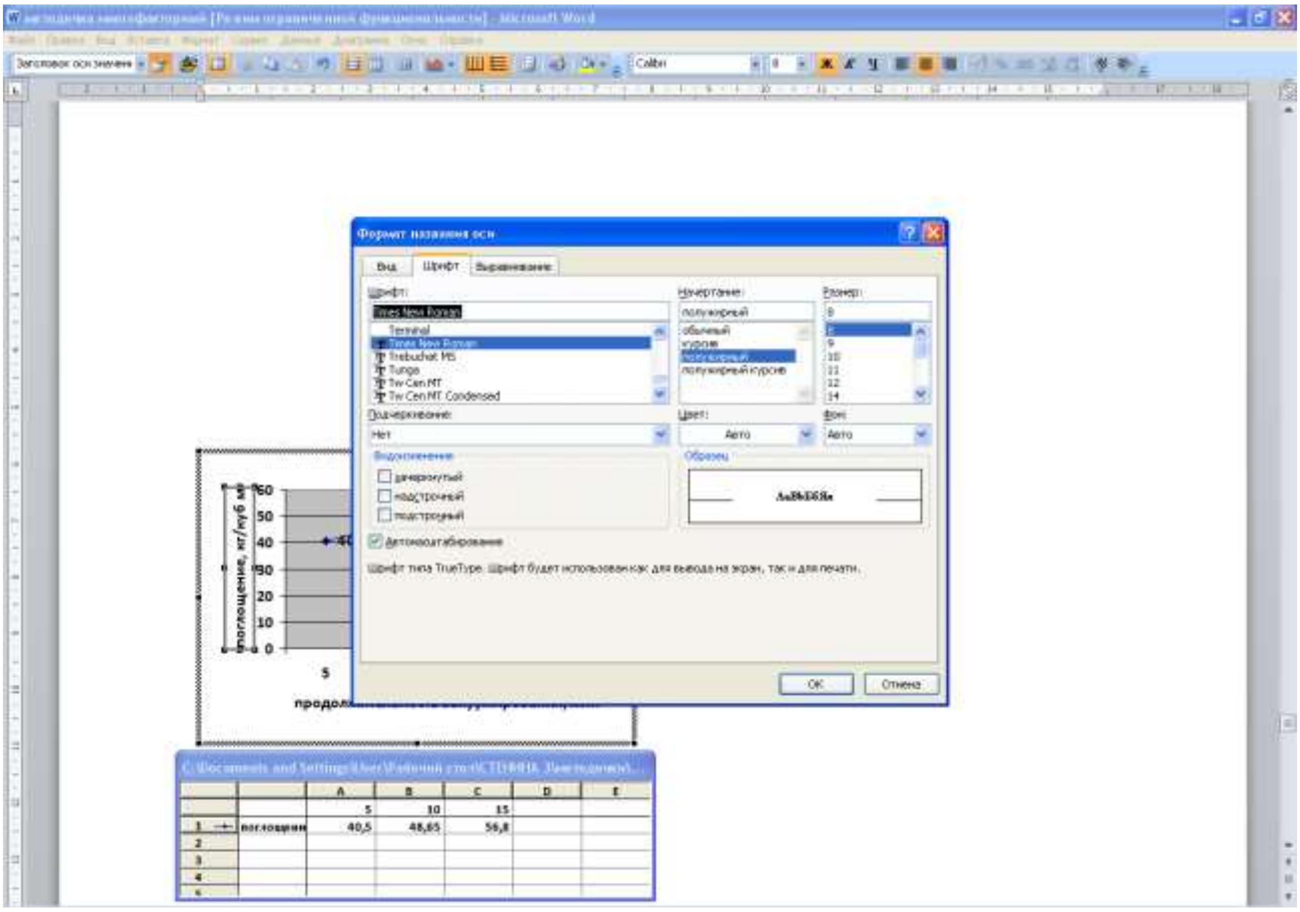

Рис. 26

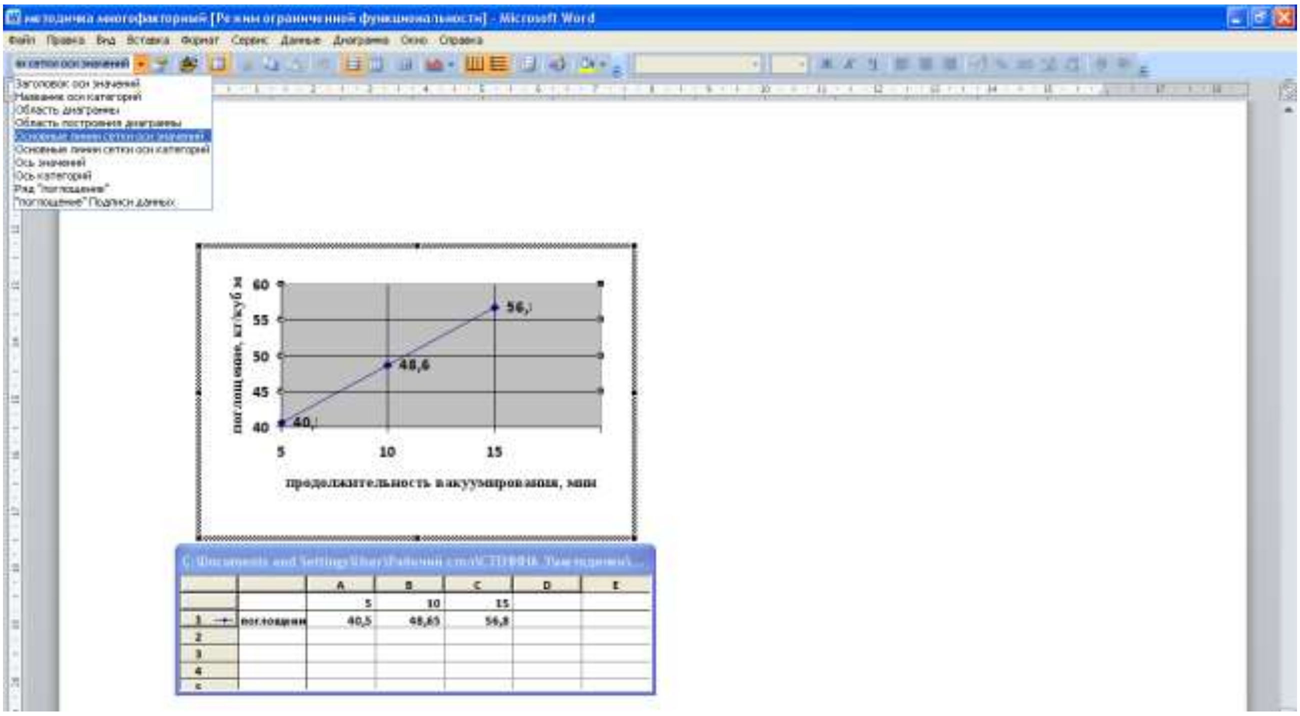
поглощение, кг/куб м
продолжительность вакуумирования, мин

Рис. 27

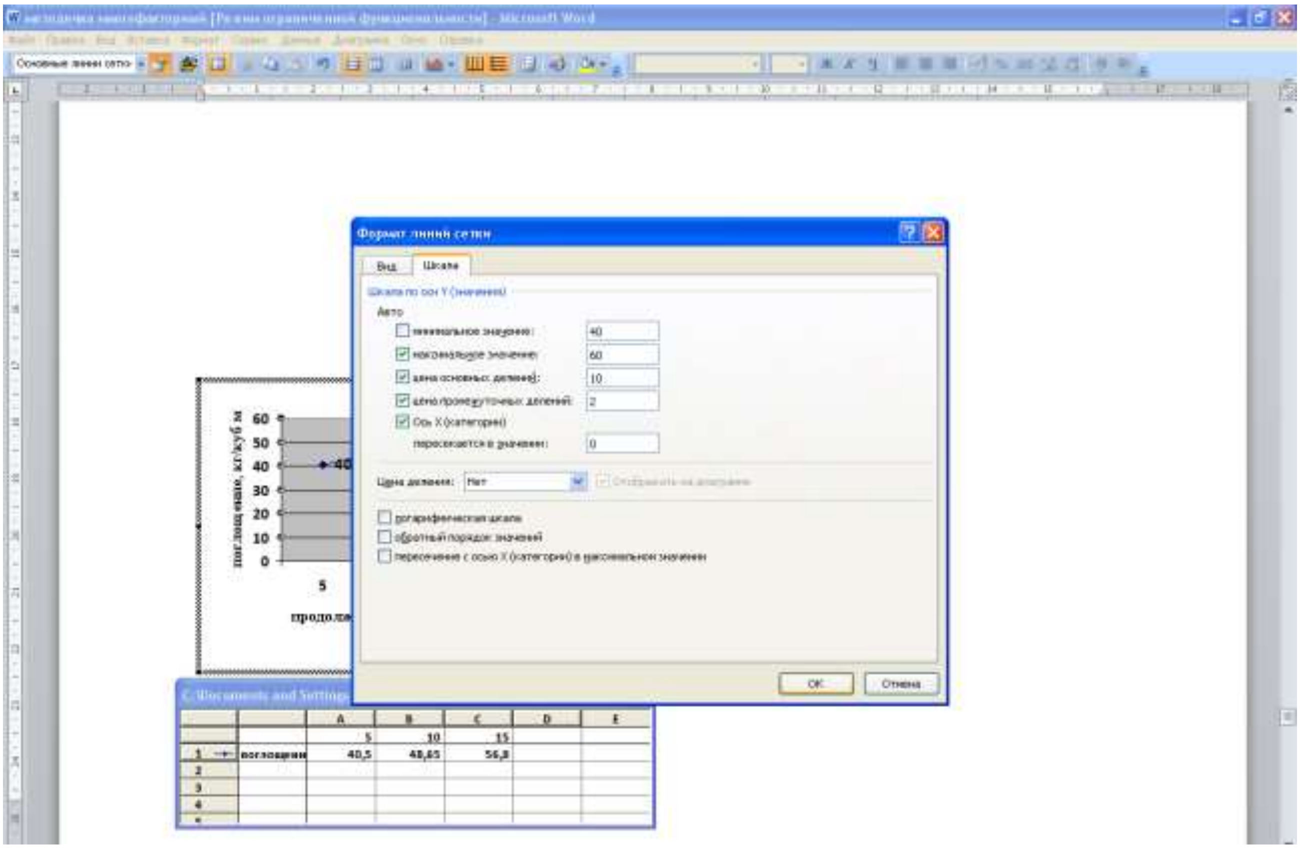
Формат линий сетки
Вид
Шкала
ОК
Отмена

Рис. 28

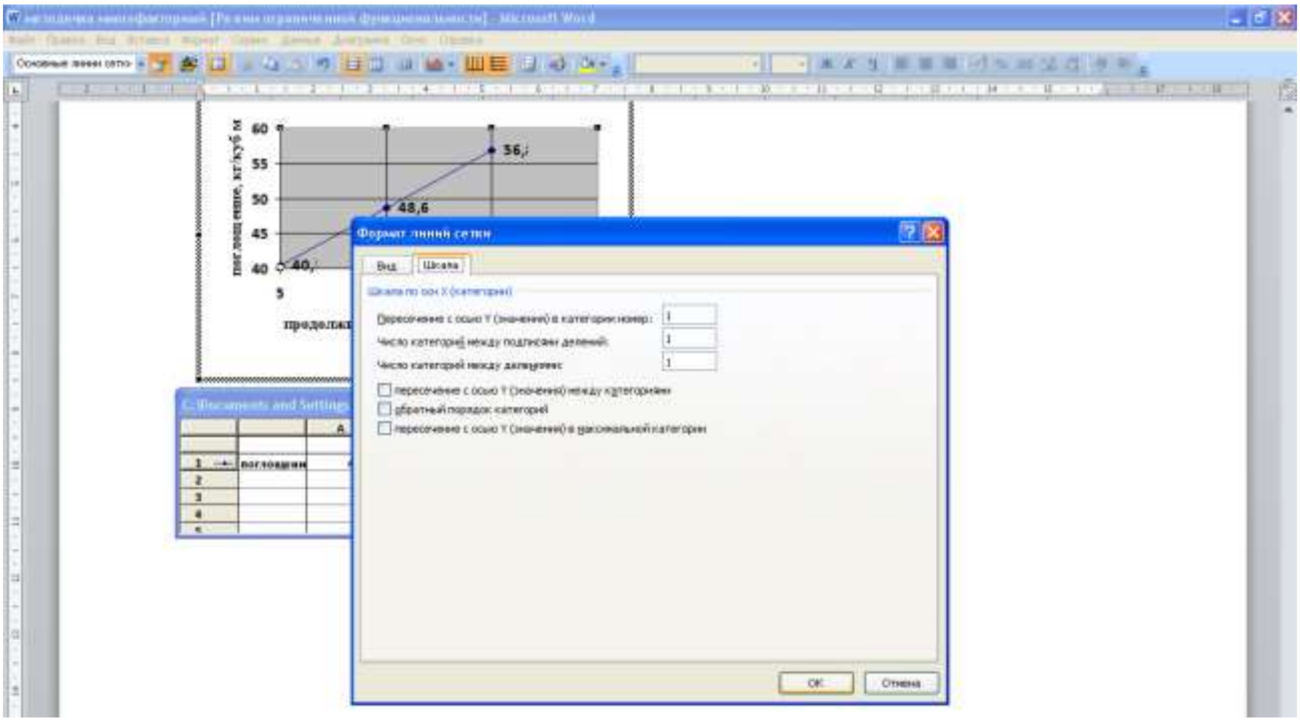
Формат линий сетки
Вид
Шкала
ОК
Отмена

Рис. 29

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лудченко А.А., Лудченко Я.А., Примак Т.А. Основы научных исследований [Текст] : Учеб. пособие / Под ред. А.А. Лудченко. — 2-е изд., стер. — К.: О-во "Знания", КОО, 2001. — 113 с.
2. Пижурин, А. А. Основы научных исследований в деревообработке [Текст] : учеб. для студентов вузов, обучающихся по дневной и заоч. форме специальностей 250403 (260200) Технология деревообработки и 150405 (170400) Машины и оборудование лесного комплекса / А. А. Пижурин, А. А. Пижурин ; Моск. гос. ун-т леса. - М. : МГУЛ, 2005. - 305с.

Приложение

Таблица 1

Значения t – критерия Стьюдента

(q – уровень значимости, f – число степеней свбоды)

f	q	q
	0,05	0,01
1	12,71	63,66
2	4,30	9,92
3	3,18	5,84
4	2,78	4,60
5	2,57	4,03
6	2,45	3,71
7	2,36	3,50
8	2,31	3,36
9	2,26	3,25
10	2,23	3,17
15	2,13	2,95
20	2,09	2,85
30	2,04	2,75
40	2,02	2,70
50	2,01	2,68
60	2,00	2,66
80	1,99	2,64
100	1,98	2,63
120	1,98	2,62
200	1,97	2,60
500	1,96	2,59
∞	1,96	2,58

Таблица 2

Значения F – критерия Фишера

(f_1 – число степеней свободы большей дисперсии, f_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

f_2	f_1											
	q = 0,05											
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
1	161	200	216	225	230	234	239	242	246	248	250	254
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,37	19,40	19,43	19,45	19,46	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,85	8,79	8,70	8,66	8,62	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,04	5,94	5,86	5,80	5,75	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,82	4,74	4,62	4,56	4,50	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,15	4,06	3,94	3,87	3,81	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,73	3,64	3,51	3,44	3,38	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,44	3,35	3,22	3,15	3,08	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,23	3,14	3,01	2,94	2,86	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,07	2,98	2,85	2,77	2,70	2,54
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,64	2,54	2,40	2,33	2,25	2,07
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,45	2,35	2,20	2,12	2,04	1,84
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,34	2,24	2,09	2,01	1,92	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,27	2,16	2,01	1,93	1,84	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,18	2,08	1,92	1,84	1,74	1,51

Продолжение табл. 2

f_2	f_1											
	q = 0,05											
	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	30	∞
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,10	1,99	1,84	1,75	1,65	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,02	1,91	1,75	1,66	1,55	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	1,94	1,83	1,67	1,57	1,46	1,00
q = 0,01												
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5982	6056	6157	6209	6261	6366
2	98,50	99,0	99,17	99,25	99,30	99,33	99,37	99,40	99,43	99,45	99,47	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,42	27,91	27,49	27,23	26,87	26,69	26,50	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,80	14,55	14,20	14,02	13,84	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,29	10,05	9,72	9,55	9,38	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,10	7,87	7,56	7,40	7,23	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,84	6,62	6,31	6,16	5,99	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,03	5,81	5,52	5,36	5,20	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,47	5,26	4,96	4,81	4,65	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,06	4,85	4,56	4,41	4,25	3,91
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,56	3,37	3,23	3,09	2,94	2,42
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,17	2,98	2,70	2,55	2,39	2,01

Таблица 3

Значения G – критерия Кохрена

(f – число степеней свободы выборки, m – количество выборок)

m	f									
	q = 0,05									
	1	2	3	4	5	10	16	36	144	∞
2	0,99	0,98	0,94	0,91	0,88	0,79	0,73	0,66	0,58	0,50
3	0,97	0,87	0,80	0,75	0,71	0,60	0,55	0,47	0,40	0,33
4	0,91	0,77	0,68	0,63	0,59	0,49	0,44	0,37	0,31	0,25
5	0,84	0,68	0,60	0,54	0,51	0,41	0,36	0,31	0,25	0,20
6	0,78	0,62	0,53	0,48	0,44	0,36	0,31	0,26	0,21	0,17
7	0,73	0,56	0,48	0,43	0,40	0,32	0,28	0,23	0,18	0,14
60	0,17	0,11	0,09	0,09	0,07	0,05	0,04	0,03	0,02	0,02
120	0,10	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01	0,01
q = 0,01										
2	0,99	0,99	0,98	0,96	0,94	0,85	0,79	0,71	0,61	0,50
3	0,99	0,94	0,88	0,83	0,79	0,67	0,61	0,52	0,42	0,33
4	0,97	0,86	0,78	0,72	0,68	0,55	0,49	0,41	0,33	0,25
5	0,93	0,79	0,70	0,63	0,59	0,47	0,41	0,34	0,26	0,20
6	0,88	0,72	0,63	0,56	0,52	0,41	0,35	0,29	0,22	0,17
7	0,84	0,66	0,57	0,51	0,47	0,36	0,31	0,25	0,19	0,14
60	0,22	0,14	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,03	0,02	0,02
120	0,12	0,08	0,06	0,05	0,04	0,04	0,03	0,02	0,02	0,01

Таблица 4

Значения критерия Пирсона χ^2

(k – число степеней свободы)

k	q	
	0,05	0,01
1	3,84	6,63
2	5,99	9,21
3	7,81	11,3
4	9,49	13,3
5	11,1	15,1
10	18,3	23,2
15	25,0	30,6
20	31,4	37,6
25	37,7	44,3
30	43,8	50,9
40	55,8	63,7
50	67,5	76,2